Révisions 2025
Matrices diagonalisables
5 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de A ?
2. Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ alors X appartient à l'image de A.
   Montrer que A est diagonalisable.

Correction

1. $C_1(A)$ et $C_2(A)$ ne sont pas colinéaires.
   $C_3(A), \dots, C_{n-1}(A)$ sont égales à $C_2(A)$.
   $C_n(A) = 2C_1(A) - C_2(A)$.
   Donc A est de rang 2.
   On en déduit que le noyau de A est de dimension $n-2 > 0$: 0 est valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre associé est $n-2$, la multiplicité $n-2$, $n-1$ ou n.
   n est exclus car la trace de A vaut 2.
2. Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $AX = \lambda X$.
   Si $\lambda \neq 0$ alors $X = \dfrac{1}{\lambda} AX \in \mathrm{Im}\,(A)$

   On cherche donc les éventuels vecteurs propres de A associés à une valeur propre non nulle sous la forme $X = xC_1(A) + yC_2(A)$.

$$AC_1(A) = \begin{pmatrix} n \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \\ n \end{pmatrix} = 3C_1(A) + (n-3)C_2(A)$$

$$AC_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3C_1(A) - C_2(A)$$

Donc :
$f(X) = 3(x+y)C_1(A) + ((n-3)x - y)C_2(A)$

$$\begin{aligned} f(X) = \lambda X &\iff 3(x+y)C_1(A) + ((n-3)x-y)C_2(A) = \lambda x C_1(A) + \lambda y C_2(A) \\ &\iff \begin{cases} 3(x+y) = \lambda x \\ (n-3)x - y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \dfrac{\lambda - 3}{3} x \\ \left(\dfrac{(\lambda+1)(\lambda-3)}{3} - (n-3) \right) x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les valeurs propres cherchées sont les racines non nulles du polynôme :
$(X+1)(X-3) - 3(n-3) = X^2 - 2X - 3(n-2)$
$3(n-2) \neq 0$ donc les racines de ce polynômes sont non nulles.
$\Delta = 4 + 12(n-2) > 0$ donc A a deux valeurs propres réelles distinctes en plus de 0.
Le système ci-dessus assure que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.
La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est donc $n - 2 + 1 + 1 = n$: A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Quel est le rang de A ?
   Que peut-on en déduire sur les éléments propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A.

Correction

1. A est de rang 2.
   On en déduit que le noyau de A est de dimension $n-2$.
   Si $n \geq 3$ alors 0 est valeur propre de A. Le sous-espace propre associé est de dimension $n-2$, la multiplicité de 0 est supérieure ou égale à $n-2$.
2. Les valeurs propres complexes de A sont $0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2$ (il y a $n-2$ zéros, y compris si $n = 2$, et λ_1 et λ_2 peuvent être nuls.
   La trace de A donne $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2(n-1) \end{pmatrix}$$
   La liste des valeurs propres de A^2 est $0, \dots, 0, \lambda_1^2, \lambda_2^2$.
   La façon le plus simple de le démontrer est de trigonaliser A : cf le cours.

Mais on peut se passer de la trigonalisation :
$\chi_A = X^{n-2}(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{A^2}(\lambda^2) &= \det(\lambda^2 I_n - A^2) = \det((\lambda I_n - A)(\lambda I_n + A)) \\
&= \det(\lambda I_n - A)\det(\lambda I_n + A) = \chi_A(\lambda)(-1)^n \chi_A(-\lambda) \\
&= \lambda^{n-2}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(-1)^n(-\lambda)^{n-2}(-\lambda-\lambda_1)(-\lambda-\lambda_2) \\
&= \lambda^{n-2}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\lambda^{n-2}(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2) \\
&= \lambda^{2n-2}(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_2^2) \\
&= Q\left(\lambda^2\right) \text{ avec } Q(X) = X^{n-2}(X-\lambda_1^2)(X-\lambda_2^2)
\end{aligned}$$

$\{\lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$ est infini donc $\chi_{A^2} = Q$.
On a donc $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 4(n-1)$ avec $\lambda_2 = -\lambda_1$.
On peut donc prendre, quitte à réindexer les valeurs propres, $\lambda_1 = \sqrt{2(n-1)}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2(n-1)}$.
La multiplicité de 0 est donc de $n-2$, égale à la dimension du sous-espace propre associé.
λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres simples donc la dimension du sous-espace propre associé est 1, égale à la multiplicité.
χ_A étant scindé, A est diagonalisable.

Exercice 3 *(Mines 2023, 2024)*

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ a_{i,j} = j + n(i-1)$

1. Trouver le rang de A
2. Montrer que A est diagonalisable.

Correction

1. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$.
   La j-ème colonne de A est $nW + jV$ donc le rang de A est inférieur ou égal à 2.
   $n \geq 2$ donc (V, W) est libre.
   Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda C_1(A) + \mu C_2(A) = 0$.
   $n(\lambda+\mu)W + (\lambda+2\mu)V = 0$
   (V, W) est libre donc $\lambda + \mu = \lambda + 2\mu = 0$.
   On en déduit $\lambda = \mu = 0$.
   Les deux premières colonnes de A étant linéairement indépendantes, le rang de A est supérieur ou égal à 2.
   Finalement, A est de rang 2.
2. Dans le cas $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 5X - 2$
   $\Delta = 33 > 0$ donc χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
   On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   On suppose désormais $n \geq 3$ de sorte que 0 est valeur propre de A, le sous-espace propre

associé étant de dimension $n-2$.
On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
AV &= A\sum_{j=1}^{n} e_j = \sum_{j=1}^{n} Ae_j = \sum_{j=1}^{n} C_j(A) = \sum_{j=1}^{n}(nW+jV)\\
&= n^2W + \frac{n(n+1)}{2}V\\
AW &= A\sum_{j=1}^{n}(j-1)e_j = \sum_{j=1}^{n}(j-1)Ae_j = \sum_{j=1}^{n}(j-1)C_j(A) = \sum_{j=1}^{n}(j-1)\,(nW+jV)\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2}W + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)V\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2}W + \frac{n(n+1)(n-1)}{3}V
\end{aligned}$$

Soit $(U_1,\dots,U_{n-2})$ une base du noyau de A.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_iU_i + \lambda_{n-1}V + \lambda_nW = 0$.
On applique A, il reste :
$\lambda_{n-1}\left(n^2W + \dfrac{n(n+1)}{2}V\right) + \lambda_n\left(\dfrac{n^2(n-1)}{2}W + \dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}V\right)$
La famille (V,W) étant libre, il vient :
$\lambda_{n-1} + \dfrac{n-1}{2}\lambda_n = 0$ et $\lambda_{n-1} + \dfrac{2(n-1)}{3}W = 0$
En faisant la différence, on obtient $\dfrac{n-1}{6}\lambda_n = 0$.
On a donc $\lambda_n = 0$, puis $\lambda_{n-1} = 0$.
Il reste alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_iU_i = 0$ avec $(U_1,\dots,U_{n-2})$ libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$.
La famille $(U_1,\dots,U_{n-2},V,W)$ est donc libre. Vu son cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.
Si on note P la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, $A = PBP^{-1}$
avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$ où $C = n\begin{pmatrix} \dfrac{n+1}{2} & \dfrac{(n+1)(n-1)}{3}\\ n & \dfrac{n(n-1)}{2}\end{pmatrix}$
Le polynôme caractéristique de C est $X^2 - \operatorname{tr}(C)X + \det(C)$. Son discriminant est

$$\begin{aligned}
\Delta &= \operatorname{tr}(C)^2 - 4\det(C)\\
&= n^2\left(\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 - 4n(n-1)(n+1)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\right)\\
&= n^2\left(\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n+1)}{3}\right)\\
&= \frac{n^2}{12}\left(3(n^4+2n^2+1) - 4(n^3-n)\right)\\
&= \frac{n^2}{12}\left(3n^4 - 4n^3 + 6n^2 + 4n + 3\right)
\end{aligned}$$

Soit $f : x \mapsto 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$.

$$\begin{aligned} \forall x \geq 2 \ f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 + 12x + 4 \\ f''(x) &= 36x^2 - 24x + 12 = 12(3x^2 - 2x + 1) \\ f^{(3)}(x) &= 72x - 24 = 24(3x - 1) > 0 \text{ si } x \geq 2 \end{aligned}$$

Donc :
$\forall x \geq 2 \ f''(x) \geq f''(2) = 108 > 0$
Donc :
$\forall x \geq 2 \ f'(x) \geq f'(2) = 76 > 0$
Donc :
$\forall x \geq 2 \ f(x) \geq f(2) = 35$
χ_C est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
$\chi_C(C) = 0$: Cayley-Hamilton.
De plus $\det(C) = -\dfrac{n^3(n-1)(n+1)}{12}$ est non nul donc le polynôme $P = X\chi_C$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
$P(B) = \begin{pmatrix} P(0) & 0 \\ 0 & P(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc B est diagonalisable.
A étant semblable à B est donc diagonalisable.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ j \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $(\lambda+1)x_1 = (\lambda+2)x_2 = \cdots = (\lambda+n)x_n$.
2. En déduire que $-1, -2, \ldots, -n$ ne sont pas valeurs propres de A.
3. Montrer que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1$.
4. En déduire que A est diagonalisable.

Correction

1. On a $AX = \lambda X$ donc :
$\forall i \in [\![1;n]\!] \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$
ce qui donne :
$\forall i \in [\![1;n]\!] \ \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} jx_j = \lambda x_i$
On en déduit :
$\forall i \in [\![1;n]\!] \ (\lambda + i)x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} jx_j$ indépendant de i.

2. Soit $k \in [\![1;n]\!]$ et supposons que $-k$ soit valeur propre de A.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   $\forall l \in [\![1;n]\!] \setminus \{k\}$ $(-k+l)x_l = (-k+k)x_k = 0$ avec $-k+l \neq 0$
   Donc :
   $\forall l \in [\![1;n]\!] \setminus \{k\}$ $x_l = 0$
   Mais alors $AX = x_k C_k(A)$ n'est pas colinéaire à $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
   On aboutit à une contradiction donc $-k$ n'est pas valeur propre de A.
3. Supposons λ valeur propre de A.
   Soit X un vecteur propre associé.
   $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $(\lambda+i)x_i = \sum_{j=1}^{n} j x_j$
   D'après les deux premières questions, on peut écrire :
   $\forall i \in [\![2;n]\!]$ $x_i = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+i} x_1$
   ce qui donne :
   $(\lambda+1)x_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} j \dfrac{\lambda+1}{\lambda+j} x_1 = 0$
   Si $x_1 = 0$ alors pour tout i compris entre 2 et n, $x_i = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+i} x_i$ est nul également et X est nul, ce qui est absurde pour un vecteur propre donc x_1 est non nul et :
   $\lambda + 1 = 1 + \sum_{j=2}^{n} j \dfrac{\lambda+1}{\lambda+j}$
   En divisant par $\lambda+1$ qui est non nul, on obtient $1 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\lambda+k}$
   Réciproquement, on suppose $1 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\lambda+k}$
   Pour tout i compris entre 1 et n, on pose $x_i = \dfrac{1}{\lambda+i}$.

On note X le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;n]\!]\ (AX)_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{j}{\lambda+j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\lambda+j} - \frac{i}{\lambda+i} = 1 - \frac{i}{\lambda+i} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda+i} = \lambda x_i \end{aligned}$$

Donc $AX = \lambda X$ avec X non nul et λ est valeur propre de A.

4. Soit $f : \lambda \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\lambda+j} - 1$.
   Soit $k \in [\![2;n]\!]$.
   $f(\lambda) \xrightarrow[\substack{x\to -k \\ x>-k}]{} +\infty$ et $f(\lambda) \xrightarrow[\substack{x\to -k+1 \\ x<-k+1}]{} -\infty$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue), f s'annule entre $-k$ et $-(k-1)$.
   De plus $f(\lambda) \xrightarrow[\substack{x\to -1 \\ x>-1}]{} +\infty$ et $f(\lambda) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$ donc f s'annule entre -1 et $+\infty$.
   A a donc au moins n valeurs propres deux à deux distinctes. Comme elle ne peut pas en avoir plus, A a exactement n valeurs propres deux à deux distinctes et A est diagonalisable.

Exercice 5 *(Centrale 2023)*

1. Soient A et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = I_{2n}$ et $AB + BA = 0$.
   (a) Montrer que A et B sont diagonalisables.
   Trouver leurs valeurs propres et leurs multiplicités.
   (b) Soit $C = iAB$.
   Montrer que C est diagonalisable.
   Trouver ses valeurs propres et leurs multiplicités.
2. Soient A et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB + BA = 0$.
   (a) Montrer que A et B sont diagonalisables.
   Trouver leurs valeurs propres et leurs multiplicités.
   (b) A et B ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

Correction

1. (a) Le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples et annule A et B donc A et B sont diagonalisables. De plus le spectre de A et le spectre de B sont inclus dans l'ensemble des racines de $X^2 - 1$ à savoir $\{-1;1\}$.
   Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_{2n})$.
   $AB + BA = 0$ donc $ABX + BX = 0$ et $BX \in \operatorname{Ker}(A + I_{2n})$.
   Donc $B(\operatorname{Ker}(A - I_{2n})) \subset \operatorname{Ker}(A + I_{2n})$.
   B étant inversible, on en déduit que $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_{2n})) \leq \dim(\operatorname{Ker}(A + I_{2n}))$.

Soit $X \in \text{Ker}\,(A + I_{2n})$.
$AB + BA = 0$ donc $ABX - BX = 0$ et $BX \in \text{Ker}\,(A - I_{2n})$.
Donc $B\,(\text{Ker}\,(A + I_{2n})) \subset \text{Ker}\,(A - I_{2n})$.
B étant inversible, on en déduit que $\dim\,(\text{Ker}\,(A + I_{2n})) \leq \dim\,(\text{Ker}\,(A - I_{2n}))$.
Donc $\dim\,(\text{Ker}\,(A + I_{2n})) = \dim\,(\text{Ker}\,(A - I_{2n}))$.
Mais A est diagonalisable donc $\dim\,(\text{Ker}\,(A + I_{2n})) + \dim\,(\text{Ker}\,(A - I_{2n})) = 2n$.
On en déduit $\dim\,(\text{Ker}\,(A + I_{2n})) = \dim\,(\text{Ker}\,(A - I_{2n})) = n$.
Comme A est diagonalisable, les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités.
A et B jouant des rôles symétriques, les valeurs propres de B sont -1 et 1 toutes deux de multiplicités n.
Remarque
L'examinateur a donné l'astuce suivante :

$$\begin{aligned}
\text{tr}\,(A) &= \text{tr}\,(AB^2) \text{ car } B^2 = I_{2n} \\
&= \text{tr}\,((AB)B) = \text{tr}\,(-(BA)B) = -\text{tr}\,(BAB) \\
&= -\text{tr}\,(B(AB)) = -\text{tr}\,((AB)B) = -\text{tr}\,(AB^2) = -\text{tr}\,(A)
\end{aligned}$$

Donc $\text{tr}\,(A) = 0$.
Mais 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles de A donc (on est dans $\mathbb{C}$) $\text{tr}\,(A) = mul(1) - mul(-1)$ donc 1 et -1 ont la même multiplicité.
Comme la somme de ces deux multiplicités vaut $2n$, elles sont toutes deux égales à n.
Mais on peut se passer de l'astuce.
On part de $AB + BA = 0$ qu'on multiplie à droite par B : $AB^2 + BAB = 0$.
Mais $B^2 = I_{2n}$ donc B est inversible d'inverse B et $A + BAB^{-1} = 0$.
En prenant la trace, on obtient $2\text{tr}\,(A) = 0$.

(b) $C^2 = -ABAB = -A(BA)B = A(AB)B = A^2B^2 = I_{2n}$
Comme ci-dessus, on en déduit que C est diagonalisable avec $\text{Sp}(C) \subset \{-1; 1\}$.

$$\begin{aligned}
\text{tr}\,(C) &= i\text{tr}\,(AB) \\
&= i\text{tr}\,(-BA) = -i\text{tr}\,(BA) = -i\text{tr}\,(AB) = -\text{tr}\,(iAB) \\
&= -\text{tr}\,(C)
\end{aligned}$$

Donc $\text{tr}\,(C) = 0$.
Comme ci-dessus, on en déduit que les valeurs propres de C sont -1 et 1 toutes deux de multiplicités n

2. (a) Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est scindé à racines simples et annule A et B donc A et B sont diagonalisables. De plus le spectre de A et le spectre de B sont inclus dans l'ensemble des racines de $X^2 - X$ à savoir $\{0; 1\}$.
On ne peut rien dire de la multiplicité des valeurs propres de A (en dehors de leur somme qui vaut $2n$).
En effet soit $p \in [\![1; n-1]\!]$.
Soit $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{2n-p} \end{pmatrix}$.
On a $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$

(b) A et B n'ont pas forcément les mêmes sous-espaces propres.
On suppose $n \geq 3$.

On prend $A = \text{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$ et $B = \text{Diag}(0, 1, 0, \ldots, 0)$.
$A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$.
$E_1(A) = \mathbb{C}e_1$ et $E_0(A) = \text{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$.
$E_1(B) = \mathbb{C}e_2$ et $E_0(B) = \text{Vect}(e_1, e_3, \ldots, e_n)$
Remarque
On part de $AB + BA = 0$ qu'on multiplie par B à droite : $AB + BAB = 0$.
On en déduit $(I_{2n} + B)AB = 0$.
Mais -1 n'est pas valeur propre de B donc $I_{2n} + B$ est inversible et $AB = 0$.
On en déduit $BA = 0$.
On a donc $E_1(B) = \text{Im}\,(B) \subset \text{Ker}\,(A) = E_0(A)$ et $E_1(A) \subset E_0(B)$.
On en déduit que la somme des multiplicités de 0 dans A et B est supérieure ou égale à $2n$ et que la somme des multiplicités de 1 dans A et B est inférieure ou égale à $2n$.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et qu'elle n'admet qu'une seule valeur propre réelle $a > 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Donner la nature de la série de terme général $\sin(\pi a^n)$.

Correction

1.

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la première colonne} \\
&= \lambda(\lambda^2 - 1) - 1 \\
&= \lambda^3 - \lambda - 1
\end{aligned}$$

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - x - 1 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = 3x^2 - 1$
f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right]$ avec $f\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$.
f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{-1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ de $\dfrac{2}{3\sqrt{3}} - 1$ à $\dfrac{-2}{3\sqrt{3}} - 1$.
f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right]$ avec $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Par conséquent :
$\exists! a \in \mathbb{R}$ tq $f(a) = 0$ et $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Mais $1 > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $f(1) = -1 < 0$ donc $a > 1$.
Les racines de χ_A' ne sont pas racines de χ_A donc χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et A est diagonalisable.

2. A a trois valeurs propres complexes simples : a, b et $\overline{b}$ avec $\mathrm{Im}\,(b) > 0$ (car A est réelle).
$\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tq : $A = P\mathrm{Diag}(a, b, \overline{b})P^{-1}$.
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = P\mathrm{Diag}(a^n, b^n, \overline{b}^n)P^{-1}$.
puis :
$\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n = a^n + b^n + \overline{b}^n = \mathrm{tr}\,(A^n)$
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est à coefficient dans $\mathbb{N}$: cela se démontre facilement par récurrence.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}\,(A^n) \in \mathbb{N}$.

3. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ |\sin(\pi a^n)| &= |\sin(\pi \mathrm{tr}\ (A^n) - 2\pi \Re e\,(b^n))| \\ &= |\sin(2\pi \Re e\,(b^n))| \end{aligned}$$

Or $ab\overline{b} = 1$ donc $|b| = \dfrac{1}{\sqrt{a}} < 1$ donc $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit $|\sin(\pi a^n)| = O\,(b^n)$.
Finalement, la série de terme général $\sin(\pi a^n)$ converge absolument donc converge.

Exercice 7 *(X 2011, Mines 2023)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 8 *(Mines 2015, Centrale 2018)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors M l'est aussi.

Correction
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$.

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si λ^2 n'est pas valeur propre de A alors :

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ X_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0 \end{aligned}$$

λ n'est pas valeur propre de M.
Par contre, si λ^2 est valeur propre de A :

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ X_1 \in E_{\lambda^2}(A) \end{cases}$$

et on peut choisir $X_1 \neq 0$.
Donc :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff \lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)$
Il s'agit maintenant de compter soigneusement les valeurs propres de M. Pour cela, il faut préciser les notations :
Les valeurs propres deux à deux distinctes de A sont notées $\mu_1, \ldots, \mu_p$.
Si μ_i est non nul, μ_i a donc deux racines carrées distinctes : ω_i et $-\omega_i$.
Par contre, 0 a une seule racine carrée.
Les nombres $0, \omega_1, -\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont deux à deux distincts. (si $\omega_i = \pm\omega_j$ alors en élevant au carré $\mu_i = \mu_j$).
Ce sont les valeurs propres de M.
Si ω est une valeur propre de M, le sous–espace propre associé est l'ensemble des colonnes $\begin{pmatrix} X_1 \\ \omega X_1 \end{pmatrix}$ où X_1 décrit $E_{\omega^2}(A)$.
On en déduit : $\dim(E_\omega(M)) = \dim(E_{\omega^2}(A))$.
En effet $\begin{cases} E_{\omega^2}(A) \to E_\omega(M) \\ X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \omega X_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme.
On a alors :

$$\sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\omega(M)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \lambda \neq 0}} \dim(E_\lambda(A))$$

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\omega \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\omega(M)) = 2n \\ &\iff \dim(\mathrm{Ker}(A)) + 2 \sum_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \lambda \neq 0}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\ &\iff 2 \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n \\ &\iff 2\left(n - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))\right) = -\dim(\mathrm{Ker}(A)) \\ &\iff \begin{cases} n - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 0 \\ \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0 \end{cases} \quad \text{car } \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq n \\ &\iff A \text{ est diagonalisable et inversible} \end{aligned}$$

0 est valeur propre de M si, et seulement si, 0 est valeur propre de A
On en déduit que M est inversible si, et seulement si, A est inversible.

Autre méthode pour montrer que la diagonalisabilité de A entraîne celle de M

On commence par diagonaliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}^*$.

$\chi_B = X^2 - \operatorname{tr}(B)X + \det(B) = X^2 - a$ est sindé à racines simples ω et $-\omega$ sur $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_\omega(B) &\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1 \\ a x_1 = \omega x_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1 \\ a x_1 = \omega^2 x_1 \end{cases} \\ &\iff x_2 = \omega x_1 \text{ car } \omega^2 = a \end{aligned}$$

Donc : $E_\omega(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$.

De même $E_\omega(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}$.

Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{pmatrix}^{-1}$.

On intuite alors $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ \Omega & -\Omega \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix}$ avec $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Omega^2 = A$.

A est diagonalisable donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = Q\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q^{-1}$.

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ soit ω_i une racine de λ_i.

Soit $\Omega = Q\mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)Q^{-1}$ de sorte que $\Omega^2 = A$.

$P\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ \Omega^2 & \Omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.

$MP = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.

De plus M est inversible :

$P \times \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Omega & -2\Omega \end{pmatrix}$: pensez à l'interprétation matricielle de l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

En prenant le déterminant, $\det(P) = (-2)^n \det(\Omega) \neq 0$ car Ω comme A est inversible.

Donc M est semblable à Δ.

Mais Δ est diagonalisable :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} QDiQ^{-1} & 0 \\ 0 & -QDiQ^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } D_i = \mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \\
&= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Di & 0 \\ 0 & -Di \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Di & 0 \\ 0 & -Di \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

et finalement M est diagonalisable.

Exercice 9 *(Ens 2023)*

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^n = I_2$.
Montrer que $M^{12} = I_2$.

Correction
Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
De plus les valeurs propres de M sont racines de ce polynôme donc de la forme $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.
On en déduit que $|\mathrm{tr}\,(M)| \leq 2$ et $|\det\,(M)| = 1$.
Mais M est à coefficients entiers donc $\mathrm{tr}\,(M)$ est un entier.
On a donc $\mathrm{tr}\,(M) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et $\det\,(M) = \pm 1$.
Il y a donc 10 cas à examiner :

- **Premier cas :** $\det\,(M) = 1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 2$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
  M étant diagonalisable, on a $M = I_2$ et $M^{12} = I_2$
- **Deuxième cas :** $\det\,(M) = 1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 1$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 - X + 1 = (X-z)(X-\overline{z})$ avec $z = \mathrm{e}^{i\pi/3}$
  M étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$ et $M^{12} = P\left(z^{12}, \overline{z}^{12}\right)P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$
- **Troisième cas :** $\det\,(M) = 1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 0$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 + 1 = (X-z)(X-\overline{z})$ avec $z = i$
  M étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$ et $M^{12} = P\left(z^{12}, \overline{z}^{12}\right)P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$
- **Quatrième cas :** $\det\,(M) = 1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = -1$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 + X + 1 = (X-z)(X-\overline{z})$ avec $z = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = j$
  M étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$ et $M^{12} = P\left(z^{12}, \overline{z}^{12}\right)P^{-1} = PI_2P^{-1} = I_2$
- **Cinquième cas :** $\det\,(M) = 1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = -2$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$
  M étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(-1, -1)P^{-1} = -I_2$ et $M^{12} = I_2$
- **Sixième cas :** $\det\,(M) = -1$ et $\mathrm{tr}\,(M) = 2$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det\,(M) = X^2 - 2X - 1 = (X-z_1)(X-z_2)$ avec $z_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + \sqrt{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.

- **Septième cas :** $\det(M) = -1$ et $\operatorname{tr}(M) = 1$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) = X^2 - X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.
- **Huitième cas :** $\det(M) = -1$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) = X^2 * 1 = (X+1)(X-1)$
  M étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(1,-1)P^{-1}$ et $M^{12} = I_2$
- **Neuvième cas :** $\det(M) = -1$ et $\operatorname{tr}(M) = -1$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) = X^2 + X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.
- **Dixième cas :** $\det(M) = -1$ et $\operatorname{tr}(M) = -2$.
  $\chi_M(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M) = X^2 + 2X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $z_2 = -1 + \sqrt{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.

Exercice 10 *(Centrale 2023)*

Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

1. Que dire de la diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$?
2. Soit $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.
   Justifier l'existence de p_0 le plus petit entier naturel non nul tel que $A^p = I_2$.
   p_0 est appelé l'ordre de A.
   Quelles sont les valeurs possibles de p_0 ?

Correction

1. Le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. De plus les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme donc de la forme $\mathrm{e}^{2ik\pi/p}$ avec $0 \leq k \leq p-1$.
   On en déduit que $|\operatorname{tr}(A)| \leq 2$ et $|\det(A)| = 1$.
   Mais A est à coefficients entiers donc $\operatorname{tr}(A)$ est un entier.
   On a donc $\operatorname{tr}(A) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et $\det(A) = \pm 1$.
   Il y a donc 10 cas à examiner :
   - **Premier cas :** $\det(A) = 1$ et $\operatorname{tr}(A) = 2$.
     $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
     A étant diagonalisable, on a $A = I_2$ et $p_0 = 1$
   - **Deuxième cas :** $\det(A) = 1$ et $\operatorname{tr}(A) = 1$.
     $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - X + 1 = (X - z)(X - \overline{z})$ avec $z = \mathrm{e}^{i\pi/3}$
     A étant diagonalisable, on a $A = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$, $A^p = P\left(z^p, \overline{z}^p\right)P^{-1}$ et $p_0 = 6$
     Mais ce cas est-il vraiment possible ?
     Il s'agit en fait de trouver une base du plan dans laquelle la matrice de la rotation d'angle $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ est à coefficients entiers.
     Considérons la base $\left(1, \mathrm{e}^{i\pi/3}\right)$.

L'image de 1 est $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ donc la première colonne est $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

L'image de $\mathrm{e}^{i\pi/3}$ est $\exp 2i\pi/3 = j = -1 - j^2 = -1 + \mathrm{e}^{i\pi/3}$ donc la deuxième colonne est $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

La matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ dont l'ordre est égal à 6.

- **Troisième cas :** $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + 1 = (X - z)(X - \overline{z})$ avec $z = i$
  A étant diagonalisable, on a $M = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$, $M^p = P\left(z^p, \overline{z}^p\right)P^{-1}$ $p_0 = 4$.
  La matrice $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ dont l'ordre est égal à 4.
- **Quatrième cas :** $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = -1$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + X + 1 = (X - z)(X - \overline{z})$ avec $z = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = j$
  A étant diagonalisable, on a $A = P\mathrm{Diag}(z, \overline{z})P^{-1}$, $A^p = P\left(z^p, \overline{z^p}\right)P^{-1}$ et $p_0 = 3$.
  La matrice $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$
- **Cinquième cas :** $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = -2$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$
  A étant diagonalisable, on a $A = P\mathrm{Diag}(-1, -1)P^{-1} = -I_2$ et $p_0 = 2$
- **Sixième cas :** $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = 2$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + \sqrt{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.
- **Septième cas :** $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = 1$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.
- **Huitième cas :** $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 * 1 = (X + 1)(X - 1)$
  A étant diagonalisable, on a $A = P\mathrm{Diag}(1, -1)P^{-1}$ et $p_0 = 2$
- **Neuvième cas :** $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = -1$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.
- **Dixième cas :** $\det(A) = -1$ et $\mathrm{tr}(A) = -2$.
  $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + 2X - 1 = (X - z_1)(X - z_2)$ avec $z_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $z_2 = -1 + \sqrt{2}$
  Ce cas ne peut pas se produire : z_1 n'est pas racine de l'unité.

Finalement les valeurs possibles de p_0 sont : 1,2,3,4 et 6.
On en déduit :
$\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})\ A^{12} = I_2$