Révisions 2025
Suites de fonctions
11 juin 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue.

Donner un équivalent de $A_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) \mathrm{d}t$.

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \ln(s) \mathrm{d}s$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $I_n = \dfrac{n}{n+1} \ln(n) + n \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\, \mathrm{d}t$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $-\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$
4. Montrer que $-I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.
5. Montrer que $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} \ln(s) \mathrm{d}s$.

Exercice 3 *(Mines 2023, 2024)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right)$
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 *(Centrale MP 2016)*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1;+\infty[, \mathbb{R})$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n}{x}\left(f\left(x + \dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) \end{cases}$.

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. On se place dans des cas particuliers.
   (a) Si $f = \ln$, montrer qu'il y a convergence uniforme.

(b) Si $f = \sin$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

3. (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que la fonction $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

   (b) On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$?