Révisions 2025
Suites de fonctions
11 juin 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue.
Donner un équivalent de $A_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f\left(t^n\right) \mathrm{d}t$.

Correction
La suite ne pose pas de problème de définition : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
On fait le changement de variable $t = y^{1/n}$.
$A_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_1^{b_n} f(y) y^{1/n-1} \,\mathrm{d}y$ avec $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
$b_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$ car $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim n\dfrac{1}{n} = 1$ donc $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
$\forall n \geq 1 \ \ln\left(b_n\right) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$: faire l'étude de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ pour justifier l'inégalité stricte (ou concavité stricte de ln)
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ b_n < \mathrm{e}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ y \mapsto f(y) y^{1/n-1} \text{ si } y \leq b_n \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > b_n \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.
- Soit $y < \mathrm{e}$
  $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$ donc $y < b_n$ APCR.
  Donc $f_n(y) = f(y) y^{1/n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{f(y)}{y}$
  Soit $y \geq e$.
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ b_n < y$
  Donc $f_n(y) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Finalement, la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $g \begin{cases} [1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ y \mapsto \dfrac{f(y)}{y} \text{ si } y < \mathrm{e} \\ y \mapsto 0 \text{ si } y \geq \mathrm{e} \end{cases}$.
- g est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.
- **Hypothèse de domination**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $y \leq b_n$:
$|f_n(y)| = |f(y)|\, y^{1/n-1}$ avec $y \geq 1$ et $\dfrac{1}{n} - 1 \leq 0$ donc :
$|f_n(y)| \leq |f(y)|$
Si $y > b_n$:
$|f_n(y)| = 0 \leq |f(y)|$
On peut donc dominer par :
$\varphi \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ y \mapsto |f(y)| \text{ si } y < \mathrm{e} \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > \mathrm{e} \end{cases}$.

D'après le théorème de convergence dominée :
$nA_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y$
f étant à valeurs strictement positives, $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y > 0$ et finalement :

$$A_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ et $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n \ln(s)\mathrm{d}s$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + n\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $-\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$
4. Montrer que $-I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.
5. Montrer que $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\ln(s)\mathrm{d}s$.

Correction

1.
$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   On en déduit que la série $\sum S_{n+1} - S_n$ converge absolument donc converge.
   D'après le lien suite série, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On commence par justifier l'existence de I_n.

La fonction $f_n \begin{cases}]0;n] \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \left(1-\dfrac{s}{n}\right)^n \ln(s) \end{cases}$ est continue sur $]0;n]$ et $f_n(s) \sim_0 \ln(s)$ avec ln intégrable sur $]0;n]$.
Donc f_n est intégrable sur $]0;n]$.
On fait ensuite le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant $t = 1 - \dfrac{s}{n}$ ou $s = n(1-t)$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^0 t^n \ln(n(1-t))(-n\,\mathrm{d}t) = n\int_0^1 t^n \left(\ln(n) + \ln(1-t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= n\ln(n)\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t + n\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{n+1}\ln(n) + n\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

3. On procède à une intégration par parties.
$u'(t) = t^n$, $u(t) = \dfrac{t^{n+1}-1}{n+1}$
$v(t) = -\ln(1-t)$, $v'(t) = \dfrac{1}{1-t}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$.
Si on pose $h = 1-t$:
$u(t) = u(1-h) = \dfrac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1} \sim -h$ et $v(t) = -\ln(h)$ donc $u(t)v(t) \xrightarrow[\substack{t\to1\\t<1}]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.
De plus $u(0)v(0) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n t^k\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\left(\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} -I_n &= -\frac{n}{n+1}\ln(n) - n\int_0^1 t^n\ln(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{n}{n+1}\ln(n) + n\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k} - \ln(n)\right) + \frac{n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{n+1}S_n + \frac{n}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \left(1 - \dfrac{s}{n}\right)^n \ln(s) \text{ si } s \leq n \\ s \mapsto 0 \text{ si } s > n \end{cases}$

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ s \mapsto \mathrm{e}^{-s} \ln(s) \end{cases}$.

     En effet fixons $s \in \mathbb{R}_+^*$.
     A partir d'un certain rang (qui dépend de s) :
     $f_n(s) = \left(1 - \dfrac{s}{n}\right)^n \ln(s) = \ln(s) \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{s}{n}\right)\right)$
     $n \ln\left(1 - \dfrac{s}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} n \times \dfrac{-s}{n} = -s$
     Donc $n \ln\left(1 - \dfrac{s}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -s$
     Donc $f_n(s) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(s)$
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
   - L'hypothèse de domination est vérifiée.
     Rappelons d'abord que la concavité de la fonction ln permet d'écrire :
     $\forall t > -1 \ \ln(1+t) \leq t$
     On en déduit :
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall s \in]0; n] \ \ |f_n(s)| = |\ln(s)| \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{s}{n}\right)\right) \leq |\ln(s)| \ \mathrm{e}^{-s}$
     De plus :
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall s > n \ \ |f_n(s)| = 0 \leq |\ln(s)| \ \mathrm{e}^{-s}$
     Donc :
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall s > 0 \ \ |f_n(s)| \leq \varphi(s) = |\ln(s)| \ \mathrm{e}^{-s}$
     avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:
     $\varphi(s) \sim_0 |\ln(s)|$ et $s^2\varphi(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$

   D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} \ln(s) \mathrm{d}s$ et on conclut facilement.

Exercice 3 *(Mines 2023, 2024)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0;1] \ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right)$
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction
On fixe $a \in [0;1]$ et on s'intéresse à la suite (de nombres) récurrente définie par $u_0 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g : x \mapsto x + \dfrac{1}{2}(a - x^2)$
g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R} \ g'(x) = 1 - x$
ce qui permet de dresser le tableau de variations de g.
$\forall x \in \mathbb{R} \ g(x) - x = \dfrac{1}{2}(a - x^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)$

En particulier $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
Avec le tableau de variations, on en déduit que l'intervalle $[0;\sqrt{a}]$ est stable par g. Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0;\sqrt{a}]$
Avec le signe de $g(x) - x$, on montre alors que la suite (u_n) est croissante.
(u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge. f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite de la suite (u_n) est un point fixe de g compris entre 0 et $\sqrt{a}$. Cela ne peut être que $\sqrt{a}$.
La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $\sqrt{\cdot}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= u_n - \sqrt{a} + \frac{a - u_n^2}{2} \\ &= (u_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq u_n \leq \sqrt{a}$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq 1 - \sqrt{a} \leq 1 - \dfrac{\sqrt{a} + u_n}{2} \leq 1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)|u_n - \sqrt{a}|$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n - \sqrt{a}| \leq \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
Soit $\epsilon > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;\epsilon^2]\ |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \leq \epsilon$
$\left(1 - \dfrac{\epsilon}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \left(1 - \dfrac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$
On a alors :
$\forall n \geq n_0\ \forall x \in [\epsilon^2;1]\ |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leq \left(1 - \dfrac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$
Donc :
$\forall n \geq n_0\ \forall x \in [0;1]\ |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$
Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 4 *(Centrale MP 2016)*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1;+\infty[,\mathbb{R})$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n}{x}\left(f\left(x + \dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) \end{cases}$.

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. On se place dans des cas particuliers.
   (a) Si $f = \ln$, montrer qu'il y a convergence uniforme.
   (b) Si $f = \sin$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

3. (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que la fonction $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).

   (b) On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$?

Correction

1. On fixe $x \in [1;+\infty[$.
   f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \xrightarrow[\substack{t\to 0\\ t\neq 0}]{} f'(x)$
   $\dfrac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(x)$
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1;+\infty[$ vers la fonction f'.

2. (a)

$$\begin{array}{rcl}\forall x \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \left|f_n(x) - f'(x)\right| & = & \left|\dfrac{n}{x}\left(\ln\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - \ln(x)\right) - \dfrac{1}{x}\right| \\ & = & \dfrac{n}{x}\left|\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right| \\ & \leq & n\left|\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right| \text{ indépendant de } x\end{array}$$

   $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \sim -\dfrac{1}{2n^2}$ donc $n\left|\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   Donc (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1;+\infty[$.

   (b)

$$\begin{array}{rcl}\forall n \in \mathbb{N}^*\ \sup\limits_{x\geq 1}\left|f_n(x) - f'(x)\right| & \geq & \left|f_n(n\pi) - f'(n\pi)\right| \\ & \geq & \left|\dfrac{1}{\pi}\left(\sin\left((n+1)\pi\right) - \sin(n\pi)\right) - \cos(n\pi)\right| = 1\end{array}$$

   Donc la suite $\left(\sup\limits_{x\geq 1}\left|f_n(x) - f'(x)\right|\right)$ ne converge pas vers 0.
   Donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f' sur $[1;+\infty[$.

3. (a)

$$\begin{array}{rcl}\forall x \geq 1\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \left|f_n(x) - f'(x)\right| & = & \left|\dfrac{n}{x}\left(f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x)\right| \\ & = & \dfrac{n}{x}\left|f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x) - \dfrac{x}{n}f'(x)\right| \\ & = & \dfrac{n}{x}\left|f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x) - \left(x+\dfrac{x}{n}-x\right)f'(x)\right| \\ & \leq & \dfrac{n}{x}\dfrac{x^2}{2n^2}\sup\limits_{x\leq t\leq x+\frac{x}{n}}\left(\left|f''(t)\right|\right)\end{array}$$

   Or la fonction $x \mapsto xf''(x)$ est bornée donc :
   $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq 1\ x\left|f''(x)\right| \leq M$
   On en déduit :

$\forall x \geq 1 \ |f''(x)| \leq \dfrac{M}{x}$
Donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \left|f_n(x) - f'(x)\right| &\leq \frac{n}{x}\frac{x^2}{2n^2} \sup_{x \leq t \leq x+\frac{x}{n}} \left(\frac{M}{t}\right) = \frac{n}{x}\frac{x^2}{2n^2}\frac{M}{x} \\
&\leq \frac{M}{2n} \text{ indépendant de } x \text{ et converge vers } 0
\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.

(b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \geq 1 \ f_n(x) = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{f\left(x + \dfrac{x}{n}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - n\frac{f(x)}{x}$$

On en déduit :
$f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) l - nl = l$
De plus, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.
D'après le théorème de la double limite, $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.