Révisions 2025
Séries de fonctions
12 juin 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2024)*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Limite L de I_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Equivalent de $I_n - L$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
   En déduire un développement à trois termes de I_n.

Exercice 3 *(Centrale 2023)*

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est intégrable sur $[1;+\infty[$ et donner $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 *(Centrale 2023)*

$\displaystyle u_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$ et $\displaystyle S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge pour $x \in [0;1[$ et diverge pour $x \in [1;+\infty[$.

   Pour $x \in [0;1[$, on note $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est croissante sur $[0;1[$?
   La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0;1[$?

3. Pour $x \in]0;1[$ et $\epsilon > 0$, on pose $N(x,\epsilon) = \left\lfloor \dfrac{\ln(\epsilon(1-x))}{\ln(x)} \right\rfloor$.
   Pour $x \in]0;1[$, on approche $S(x)$ par $S_{N(x,10^{-3})}(x)$.
   Utiliser Python pour représenter la fonction S sur $[0;0,99]$.
   Faire une conjecture sur le comportement de $S(x)$ quand x tend vers 1.
4. Montrer que la fonction S est continue sur $[0;1[$.
5. Démontrer la conjecture de la question 3.
6. Tracer la fonction $x \mapsto \dfrac{S(x)}{-\ln(1-x)}$ sur $[0,5;0,99]$.
   Faites une conjecture sur le comportement de $S(x)$ quand x tend vers 1.
7. Démontrer votre conjecture.
8. ?
9. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1[$?

Exercice 5 *(X 2023)*

On considère $g(x) = \dfrac{1}{x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g et montrer que g est continue sur son domaine de définition.
2. Montrer que g est 1-périodique.
3. Etablir une relation entre $g\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ et $g(x)$.
4. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ g(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$