Révisions 2025
Séries de fonctions
12 juin 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2024)*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\,\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\,\mathrm{e}^{-x}} &= x\,\mathrm{e}^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\,\mathrm{e}^{-x}\right)^n \ \text{ car } \ \mathrm{e}^{-x} \in]-1;1[\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:
  $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $x^2 f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\,\mathrm{e}^{-x}} \end{cases}$ est continue.
- La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\,\mathrm{d}x \\
&\quad \text{IPP facile à justifier} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.

On peut donc appliquer le théorème $N1$ et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Exercice 2 *(Mines 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. Limite L de I_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Equivalent de $I_n - L$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.
   En déduire un développement à trois termes de I_n.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{1+t^n} \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$.
   - La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 \text{ si } t \neq 1 \\ 1 \mapsto \dfrac{1}{2} \end{cases}$.
   - f est continue.
   - **Hypothèse de domination**
     $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0;1]\ \ |f_n(t)| = \dfrac{1}{1+t^n} \leq 1$
     avec $t \mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0;1]$.

   D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
2.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_n - L &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} - 1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} - \int_0^1 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^n} - 1\right)\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{u}{1+u}\frac{1}{n}u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow\nearrow t = u^{1/n} \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{u+1}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \dfrac{u^{1/n}}{u+1} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;1]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $f\begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\ u\mapsto\dfrac{1}{1+u}\text{ si }u>0\\ 0\mapsto 0\end{cases}$.
- f est continue.
- **Hypothèse de domination**
  $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall u\in[0;1]\ \ |f_n(u)|=\dfrac{u^{1/n}}{u+1}\leq 1$
  avec $u\mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0;1]$.

D'après le théorème de convergence dominée,
$\displaystyle\int_0^1\frac{u^{1/n}}{u+1}\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u=\ln(2)$.

3. $\forall t\in]0;1[\ \ \dfrac{\ln(t)}{1+t}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\ln(t)$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit $f_k\begin{cases}]0;1]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto(-1)^k t^k\ln(t)\end{cases}$

- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, f_k est continue et intégrable sur $]0;1]$:
  si $k\in\mathbb{N}^*$, f_k est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$.
  $f_0=\ln$ est intégrable sur $]0;1]$
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0}f_k$ converge simplement sur $]0;1]$ (séparer le cas $t=1$).
- La fonction $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}f_k\begin{cases}]0;1]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\dfrac{\ln(t)}{1+t}\text{ si }t\in]0;1]\end{cases}$ est continue.
-

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N}\ \int_0^1|f_k(t)|\ \mathrm{d}t &= -\int_0^1 t^k\ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_0^1+\frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \text{ IPP facile à justifier}\\ &= \frac{1}{(k+1)^2}\end{aligned}$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\int_0^1|f_k(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème $N1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\ln(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 t^k\ln(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\end{aligned}$$

Passons au développement à trois termes :

$$\begin{aligned} I_n - \left(L - \frac{\ln(2)}{n}\right) &= I_n - L + \frac{\ln(2)}{n} = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{u+1}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-t^{1/n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{n\left(1-t^{1/n}\right)}{1+t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{n\left(1-t^{1/n}\right)}{1+t} \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0;1]$.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0;1]$ vers la fonction $f \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{-\ln(t)}{1+t} \end{cases}$.

  En effet, si on fixe $t \in]0;1]$:
  $f_n(t) = \dfrac{n\left(1-\mathrm{e}^{1/n\ln(t)}\right)}{1+t} = \dfrac{n}{1+t}\left(1 - 1 - \dfrac{\ln(t)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
- La fonction f est continue sur $]0;1]$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  Par les accroissements finis :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- \;\; |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y| \leq |x-y|$
  puisque :
  $\forall t \in \mathbb{R}_- \;\; \mathrm{e}^t \leq 1$
  Donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall t \in]0;1] \;\; |f_n(t)| \leq \dfrac{|\ln(t)|}{1+t} \leq |\ln(t)|$
  avec $|\ln|$ continue, positive et intégrable sur $]0;1]$

D'après le théorème de convergence dominée :
$n^2\left(I_n - \left(L - \dfrac{\ln(2)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$
Mais :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

et finalement :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 3 *(Centrale 2023)*

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est intégrable sur $[1;+\infty[$ et donner $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction

1. On procède par analyse-synthèse.
   On suppose que f existe.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*\forall n\in\mathbb{N}^*\ f(x)-f(x+n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x+k)-f(x+k+1)\right) \quad \text{téléscopage}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(x+k)^3}\end{aligned}$$

   En faisant tendre n vers $+\infty$ à x dixé, on obtient :
   $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^3}$
   D'où l'unicité en cas d'existence.

   Réciproquement pour tout $n\in\mathbb{N}$ soit $f_n\begin{cases}\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{1}{(x+n)^3}\end{cases}$ (qui est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ en entier).
   Soit $x>0$ fixé.
   $f_n(x)\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}$, tout est positif et la série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ converge. On en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge.
   La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme, notée f dans la suite, est donc une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\forall x\in[1;+\infty[\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(x)|=\dfrac{1}{(x+n)^3}\leq\dfrac{1}{(n+1)^3}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
   On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[1;+\infty[$.
   On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$.
   De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (théorème de la double limite).
   Enfin :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ f(x)-f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^3}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+1+n)^3}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^3}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^3}\\ &= \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

   D'où l'existence.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $a>0$.
   $\forall x\in[a;+\infty[\ \forall n\in\mathbb{N}\ |f_n(x)|=\dfrac{1}{(x+n)^3}\leq\dfrac{1}{(n+a)^3}$ indépendant de x et terme général

d'une série convergente.
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$.
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$.
On en déduit que f est continue sur $[a;+\infty[$.
Comme c'est vrai pour tout $a>0$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. • Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $[1;+\infty[$.
   • La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[1;+\infty[$ et sa somme (f) est continue.
   • La série de terme général $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.
   En effet :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+n)^2}\right]_1^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2(n+1)^2}\end{aligned}$$

D'après le théorème N1, f est intégrable sur $[1;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

Exercice 4 *(Centrale 2023)*

$u_n(x)=\dfrac{x^n}{1+nx}$ et $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge pour $x\in[0;1[$ et diverge pour $x\in[1;+\infty[$.
   Pour $x\in[0;1[$, on note $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n est croissante sur $[0;1[$?
   La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0;1[$?
3. Pour $x\in]0;1[$ et $\epsilon>0$, on pose $N(x,\epsilon)=\left\lfloor\dfrac{\ln(\epsilon(1-x))}{\ln(x)}\right\rfloor$.
   Pour $x\in]0;1[$, on approche $S(x)$ par $S_{N(x,10^{-3})}(x)$.
   Utiliser Python pour représenter la fonction S sur $[0;0,99]$.
   Faire une conjecture sur le comportement de $S(x)$ quand x tend vers 1.
4. Montrer que la fonction S est continue sur $[0;1[$.
5. Démontrer la conjecture de la question 3.

6. Tracer la fonction $x \mapsto \dfrac{S(x)}{-\ln(1-x)}$ sur $[0,5;0,99]$.
   Faites une conjecture sur le comportement de $S(x)$ quand x tend vers 1.
7. Démontrer votre conjecture.
8. ?
9. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1[$?

Correction

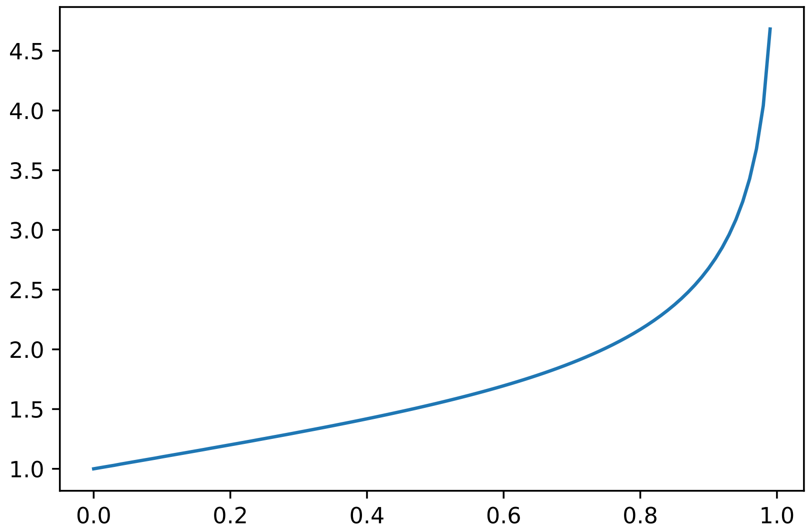
1. On peut commencer par remarquer que si $x \in \mathbb{R}_+$ tous les $u_n(x)$ sont bien définis.
   Si $x \in [0;1[$:
   $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq u_n(x) \leq x^n$ terme général d'une série convergente
   Donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge.
   Pour $x \geq 1$, $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ diverge grossièrement.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1[$ et :
   $$\forall x \in [0;1[\ u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+nx)-nx^n}{(1+nx)^2} = \frac{nx^{n-1}(1+nx-x)}{(1+nx)^2}$$
   $\forall x \in [0;1[\ 1+nx-x \geq 1-x \geq 0$
   Donc u_n' est positive sur $[0;1[$ et u_n est croissante sur $[0;1[$.
   On a donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \sup\limits_{x\in[0;1[}(|u_n(x)|) = \sup\limits_{x\in[0;1[}(u_n(x)) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(u_n(x)) = u_n(1) = \dfrac{1}{n+1}$ terme général d'une série divergente.
   La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $[0;1[$.
3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def u(n,x):
    return x**n/(1+n*x)

def N(x,epsilon):
    return int(np.log(epsilon*(1-x))/np.log(x))

def S(x):
    if x==0:
        return 1.
    return sum(u(n,x) for n in range(N(x,10**-3)+1))

les_x=[0.01*i for i in range(100)]
les_y=[S(x) for x in les_x]
plt.plot(les_x,les_y)
```



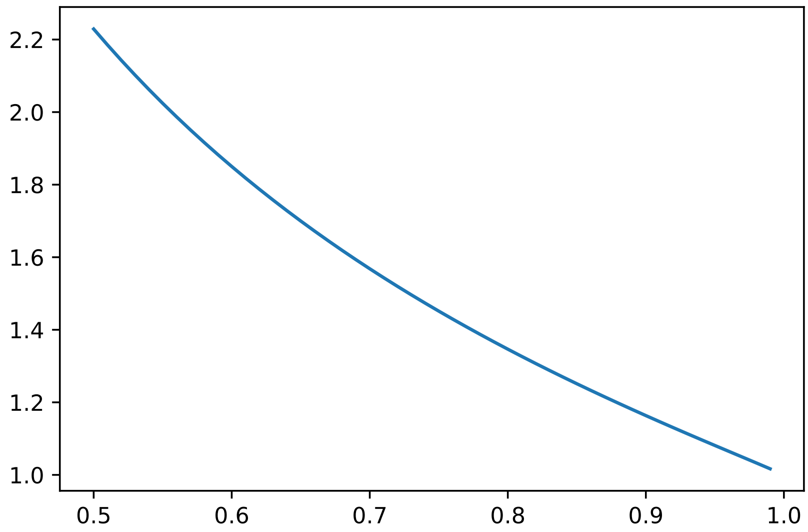
On conjecture $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (S(x)) = +\infty$

4.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $[0;1[$.
   - Pour tout $a \in]0;1[$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;a]$:

     Soit $a \in]0;1[$.
     $\forall n \in \mathbb{N} \sup\limits_{x\in[0;a]} (|u_n(x)|) = \sup\limits_{x\in[0;a]} (u_n(x)) = u_n(a)$ terme général d'une série convergente.
     Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0;a]$.
     Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0;a]$.

   On en déduit que la fonction S est continue sur $[0;1[$.
5. S est croissante comme somme de fonctions croissantes donc $S(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

   De plus :
   $\forall x \in [0;1[\ S(x) \leq l$
   Mais :
   $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0;1[\ S_n(x) \leq S(x)$
   Donc :
   $\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0;1[\ S_n(x) \leq l$
   On fixe n et on fait tendre x vers 1 :
   $\forall n \in \mathbb{N} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \leq l$
   On fait tendre n vers $+\infty$: $+\infty \leq l$.
6.
```
les_x=[0.01*i for i in range(50,100)]
les_y=[S(x)/(-np.log(1-x)) for x in les_x]
plt.plot(les_x,les_y)
```



On conjecture $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\dfrac{S(x)}{-\ln(1-x)} \right) = 1$

7. Pour déterminer un équivalent de $S(x)$, une méthode fréquente consiste à encadrer $S(x)$ avec la comparaison série-intégrale.
On peut s'en sortir ici mais c'est techniquement difficile :
On fixe $x \in]0;1[$.
Soit $\phi \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{x^t}{1+tx} = \dfrac{e^{t\ln(x)}}{1+tx} \end{cases}$.
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \phi'(t) &= \frac{\ln(x) t^x (1+tx) - x t^x}{(1+tx)^2} \\ &= \frac{t^x \left(\ln(x)(1+tx) - x\right)}{(1+tx)^2} \\ &\leq 0 \text{ car } \ln(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction ϕ est décroissante et positive et on peut procéder à une comparaison série intégrale.
$1 + \displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq S(x) \leq 1 + \frac{x}{1+x} + \int_1^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{tx}$ est bien définie (contrairement à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{tx}\,\mathrm{d}t$).
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{tx} = -\frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{t\ln(x)}}{t(1+tx)}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\longrightarrow} -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \in \mathbb{R}$ par application du théorème de convergence dominée (dans sa variante pour les intégrales à paramètres)
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ avec le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u = -t\ln(x)$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_{-\ln(x)}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$

La fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}$ étant prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$\displaystyle\int_{-\ln(x)}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u} du \xrightarrow[x<1]{x\to 1} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u} du$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln(-\ln(x)) + O(1) \sim_{1^-} -\ln(-\ln(x))$ qui tend vers $+\infty$.

$-\ln(x) \sim_{1^-} 1-x$ et ce sont des infiniment petits donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \sim_{1^-} -\ln(1-x)$

On en déduit $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{xt}\,\mathrm{d}t \sim_{1^-} -\ln(1-x)$ puis $\displaystyle\int_1^{+\infty} \phi(t)\,\mathrm{d}t \sim_{1^-} -\ln(1-x)$

Finalement $S(x) \sim_{1^-} -\ln(1-x)$

Une autre méthode est possible :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0;1[\ S(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+nx} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{nx} \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{nx(1+nx)}\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \left[\dfrac{1}{2};1\right[\ \left|\dfrac{x^n}{nx(1+nx)}\right| = \dfrac{x^n}{nx(1+nx)} \leq \dfrac{1}{\dfrac{n}{2}\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

On en déduit que cette série de fonctions converge normalement sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right[$ et que :

$S(x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x<1]{x\to 1} 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 1 = 0$

Mais $\dfrac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x<1]{x\to 1} -\infty$ donc :

$S(x) \sim -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \sim -\ln(1-x)$

8.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \xrightarrow[x<1]{x\to 1} \dfrac{1}{1+n}$

   Si la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ convergeait uniformément sur $[0;1[$ alors par le théorème de la double limite, la série de terme général $\dfrac{1}{1+n}$ convergerait, ce qui n'est pas.

   La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1[$.

Exercice 5 *(X 2023)*

On considère $g(x) = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g et montrer que g est continue sur son domaine de définition.
2. Montrer que g est 1-périodique.
3. Etablir une relation entre $g\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ et $g(x)$.
4. Montrer :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\ g(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)$

Correction

1. Soit $g_0 \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{2x}{n^2 - x^2} \end{cases}$.

   $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{D}_{g_0} \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_{g_n} \right) = \mathbb{R}_+^* \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (\mathbb{R} \setminus \{-n; n\}) \right) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$
   Réciproquement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, toutes les fonctions g_n sont définies en x et :
   $|g_n(x)| \sim \dfrac{2|x|}{n^2}$
   donc la série de terme général $g_n(x)$ converge absolument donc converge.
   Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

   Il s'agit ensuite de montrer que g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k; k+1[$.
   Cela revient à montrer que g est continue sur chaque intervalle $]k; k+1[$.
   Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   Soit $c = \max(|k|; |k+1|) = \begin{cases} k+1 \text{ si } k \geq 0 \\ -k \text{ si } k < 0 \end{cases}$.
   $\forall x \in]k; k+1[\ |x| \leq c$ et $x^2 \leq c^2$
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ n^2 > c^2$
   On a donc :
   $\forall n \geq n_0\ \forall x \in]k; k+1[\ n^2 - x^2 \geq n^2 - c^2 > 0$
   Donc :
   $\forall n \geq n_0\ \forall x \in]k; k+1[\ |g_n(x)| \leq \dfrac{2c}{n^2 - c^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
   Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq n_0} g_n$ converge normalement sur $]k; k+1[$.
   Comme les g_n sont toutes continues sur $]k; k+1[$, la fonction $\sum_{n=n_0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $k : k+1[$.
   La fonction $g_0 + \sum_{n=1}^{n_0 - 1} g_n$ est continue (il n'y a aucun problème dans l'application des théorèmes généraux).
   On en déduit que g est continue sur $]k; k+1[$.
2. La technique de la décomposition en éléments simples donne :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-n; n\}\ \dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{2x}{(n-x)(n+x)} = \dfrac{a_n}{n-x} + \dfrac{b_n}{b_n + x}$

On multiplie par $n-x$ et on évalue en $x=n$: $a_n=1$
On multiplie par $n+x$ et on évalue en $x=-n$: $b_n=-1$
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-n;n\}\ \dfrac{2x}{n^2-x^2}=\dfrac{1}{n-x}-\dfrac{1}{n+x}=-\left(\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n}\right)$
Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, soit $S_N=g_0-\displaystyle\sum_{n=1}^{N}g_n$.
$\forall N\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ S_N(x)=\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+n}$

$$\begin{aligned}\forall N\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ S_N(x+1) &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x+1+n}=\sum_{n=-N+1}^{N+1}\frac{1}{x+n}\\ &= S_N(x)-\frac{1}{x+N}+\frac{1}{x+1+N}\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ g(x+1)=g(x)$

3. Si $x\notin\mathbb{Z}$ alors $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x+1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\forall N\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ S_N\left(\frac{x}{2}\right)+S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{x/2+n}+\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(x+1)/2+n}\\ &= \sum_{n=-N}^{N}\frac{2}{x+2n}+\sum_{n=-N}^{N}\frac{2}{x+2n+1}\\ &= 2\sum_{n=-2N}^{2N+1}\frac{1}{x+n}=2S_N(x)+\frac{2}{x+2N+1}\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ g\left(\dfrac{x}{2}\right)+g\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=2g(x)$

4. Le domaine de définition de $h:x\mapsto\pi\,\text{cotan}\,(\pi x)$ est $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
h est continue sur son domaine de définition, 1-périodique et :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ h\left(\frac{x}{2}\right)+h\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi\left(\frac{\cos(\pi x/2)}{\sin\pi(x/2)}+\frac{\cos(\pi x/2+\pi/2)}{\sin(\pi x/2+\pi/2)}\right)\\ &= \pi\left(\frac{\cos(\pi x/2)}{\sin\pi(x/2)}+\frac{-\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)}\right)\\ &= \pi\frac{\cos^2(\pi x/2)-\sin^2(\pi x/2)}{\cos(\pi x)\sin(\pi x)}\\ &= \pi\frac{\cos(\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(\pi x)}\\ &= 2h(x)\end{aligned}$$

La fonction $f=g-h$ est donc définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et vérifie :
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\ f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=2f(x)$.

On montre facilement que $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est continue en 0 (où elle vaut 0) donc :

$g(x) = \frac{1}{x} + o(1)$

$$\begin{aligned} h(x) &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\pi x} \frac{\cos(\pi x)}{\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1 + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{1}{x}(1 + o(x)) \\ &= \frac{1}{x} + o(1) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.
Par périodicité, f est continue sur $\mathbb{R}$.
f est continue et périodique donc :
$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq f(x_0)$
$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0)$ avec $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \leq f(x_0)$ et $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \leq f(x_0)$
Donc $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f(x_0)$ et on recommence :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $f(x_0) = f(0) = 0$: le maximum de f vaut 0.
On raisonne de même avec le minimum pour prouver que le minimum de f vaut 0.
La fonction f est donc nulle sur $\mathbb{R}$.