

Révisions 2025
Algèbre linéaire
16 juin 2025

941

Exercice 1 (CCP 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On cherche les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M^2 + M = A$.

1. Résoudre :

(a) $x^2 + x = 2$

(b) $x^2 + x = 6$

2. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
 A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

3. On suppose dans cette question et dans la suivante que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et vérifie $M^2 + M = A$.

(a) Montrer que si X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ alors X est vecteur propre de A et $\lambda \in \{-3; -2; 1; 2\}$.

(b) Montrer que A et M commutent.

En déduire que tout vecteur propre de A est vecteur propre de M .

4. Montrer par l'absurde que M n'admet que des valeurs propres simples.
 M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

5. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A$.

Correction

1. (a) On réécrit l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$.

$$\Delta = 9, x = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ ou } x = \frac{-1+3}{2} = 1$$

(a) On réécrit l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$.

$$\Delta = 25, x = \frac{-1-5}{2} = -3 \text{ ou } x = \frac{-1+5}{2} = 2$$

2.

$$\begin{aligned} \chi_A &= X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 8X + 12 = (X-4)^2 - 16 + 12 \\ &= (X-4)^2 - 4 = (X-4-2)(X-4+2) = (X-2)(X-6) \end{aligned}$$

χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) &\iff \begin{cases} 5x + y = 2x \\ 3x + 3y = 2y \end{cases} \\ &\iff y = -3x \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une base de $E_2(A)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_6(A) \iff \begin{cases} 5x + y = 6x \\ 3x + 3y = 6y \end{cases} \\ \iff y = x$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_6(A)$.

3. (a) $MX = \lambda X$ donc $M^2X = M(MX) = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$
 On en déduit $AX = M^2X + MX = (\lambda^2 + \lambda)X$
 X étant un vecteur propre de M , X est non nul donc X est un vecteur propre de A
 et $\lambda^2 + \lambda$ est une valeur propre de A .
 On en déduit que $\lambda^2 + \lambda = 2$ ou 6 puis que $\lambda \in \{-3; -2; 1; 2\}$.
- (b) $AM = (M^2 + M)M = M^3 + M^2$
 $MA = M(M^2 + M) = M^3 + M^2$
 A et M commutent.

Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre 2 (le raisonnement est le même si X est vecteur propre pour la valeur propre 6).

$E_2(A)$ est de dimension 1 donc $E_2(A) = \mathbb{R}X$.

A et M commutent donc $E_2(A)$ est stable par M .

La droite $\mathbb{R}X$ est stable par M donc X est vecteur propre de M .

4. Les colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Ce sont des vecteurs propres de A donc des vecteurs propres de M .

Par conséquent, M est diagonalisable.

Si M avait une valeur propre double λ alors M serait égal à λI_2 et A serait égal à $(\lambda^2 + \lambda)I_2$.

Mais A n'est pas une matrice scalaire donc M n'a pas de valeur propre double.

5. En reprenant ce qui précède et en supposant toujours $M^2 + M = A$, $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si M est de la forme ci-dessus ;

$$\begin{aligned} M^2 + M = A &\iff P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 + \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ car } P \text{ et } P^{-1} \in GL_2(\mathbb{R}) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2^2 + \lambda_2 = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 \in \{-2; 1\} \\ \lambda_2 \in \{-3; 2\} \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 4 solutions :

$$P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Centrale 2023)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

On note r le rang de u et $p = n - r$.

1. Montrer que $2r \leq n$.

$$2. \text{ On a donc } r \leq p \text{ et on note } I_{p,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$$

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{p,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u\}$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Correction

1. $u^2 = 0$ donc $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

On en déduit $r = \dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\text{Ker}(u)) = n - r$.

Donc $2r \leq n$.

2. $\text{Im}(u)$ est de dimension r donc il existe $(e_1, \dots, e_r)$ base de $\text{Im}(u)$.

$\text{Im}(u)$ est inclus dans $\text{Ker}(u)$ donc on peut compléter la famille libre $(e_1, \dots, e_r)$ et $(e_1, \dots, e_p)$ base de $\text{Ker}(u)$.

Pour tout i compris entre 1 et r , on note e_{p+i} un antécédent de e_i .

On a au total $p + r = n$ vecteurs.

Pour montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

On considère donc n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$.

Lorsqu'on applique u , il reste $\sum_{i=1}^r \lambda_{p+i} e_i = 0$.

La famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre donc $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Il reste alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$ avec $(e_1, \dots, e_p)$ libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

$(e_1, \dots, e_n)$ est bien une base de E .

La matrice de u dans cette base a la forme voulue.

3. On démontre facilement que le commutant de u est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. C'est vrai de tout endomorphisme u de E .

La difficulté est ici de trouver la dimension du commutant de u .

L'intérêt de l'introduction de la matrice $I_{p,n}$ est que $\begin{pmatrix} 0 & I_{p,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une décomposition en

blocs classique (ce sont les blocs diagonaux qui sont carrés) contrairement à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où ce sont les blocs en dehors de la diagonale qui sont carrés).

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_{p,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AI_{p,r} \\ 0 & CI_{p,r} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & I_{p,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{p,r}C & I_{p,r}D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C est une matrice à r lignes et p colonnes.

Elle peut se décomposer en $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$ avec C_1 à r lignes et r colonnes et C_2 à r lignes et $p - r$ colonnes.

De même $I_{p,r} = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ avec un bloc de 0 à $p - r$ lignes et r colonnes.

$$I_{p,r}C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } CI_{p,r} = C_1 \text{ donc :}$$

$$I_{p,r}C = 0 \text{ et } CI_{p,r} = 0 \iff C = 0$$

$$D \text{ est une matrice à } r \text{ lignes et } r \text{ colonnes donc } I_{p,r}D = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$$

A peut se décomposer en $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$, $A_3 \in \mathcal{M}_{p-r,r}(\mathbb{K})$ et $A_4 \in \mathcal{M}_{p-r}(\mathbb{K})$.

$$AI_{p,r} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$I_{p,r}D = AI_{p,r} \iff \begin{cases} D = A_1 \\ A_3 = 0 \end{cases}$$

Le commutant de u est donc de dimension :

$$p^2 - r(p - r) + pr = p^2 + r^2$$

Exercice 3 (Centrale 2024)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Est-ce que $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?
2. ?

Correction

1. Un examen des premières puissances de B suggère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{P}(k) : B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ & A^k \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$B^{k+1} = BB^k = \begin{pmatrix} A & A \\ & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix} \text{ donc } \mathcal{P}(k+1) \text{ est vraie.}$$

On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

Supposons B diagonalisable.

Il existe P scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$.

$P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$.

Mais A est inversible donc $P'(A) = 0$.

χ_A est un polynôme de degré $n \geq 1$ donc χ_A a au moins une racine λ (théorème de d'Alembert-Gauss).

$P(A)$ et $P'(A)$ sont nuls donc λ est racine de P et de P' : c'est absurde car P est scindé à racines simples.

Donc B n'est pas diagonalisable.

Autre méthode

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - B) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & -A \\ 0 & \lambda I_n - A \end{vmatrix} = \det(\lambda I_n - A)^2$$

Donc $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A)$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(B) = \text{Sp}(A)$.

A est inversible donc $\lambda \neq 0$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$$

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(B) &\iff \begin{cases} AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 \\ AX_2 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (A - \lambda I_n)X_1 = -AX_2 \\ X_2 \in E_\lambda(A) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \Phi \begin{cases} E_\lambda(B) \rightarrow \mathbb{C}^n \\ X \mapsto X_2 \end{cases}$$

Φ est bien définie et c'est une application linéaire.

Soit $X \in \text{Ker}(\Phi)$.

$X_2 = \Phi(X) = 0$ mais on a aussi :

$(A - \lambda I_n)X_1 = -\lambda X_2 = 0$ donc $X_1 \in E_\lambda(A)$.

Réciproquement si $X_1 \in E_\lambda(A)$ alors $(A - \lambda I_n)X_1 = 0 = -AX_2$ avec $X_2 = 0 \in E_\lambda(A)$.

Donc $(X_1, 0) \in E_\lambda(B)$ et $\Phi((X_1, 0)) = 0$

$\text{Ker}(\Phi) = \{(X_1, 0), X_1 \in E_\lambda(A)\}$ et $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = \dim(E_\lambda(A))$

Soit $Y \in \text{Im } \Phi$.

$$\text{Il existe } (X_1, X_2) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \text{ tel que } \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in E_\lambda(B) \text{ et } \Phi\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right) = Y$$

On a donc $Y = X_2 \in E_\lambda(A)$ et $(A - \lambda I_n)X_1 = -AX_2 = -\lambda X_2 = -\lambda Y$

On en déduit $Y = \frac{-1}{\lambda}(A - \lambda I_n)X_1 \in \text{Im}(A - \lambda I_n)$

Réciproquement, si $Y \in E_\lambda(A) \cap \text{Im}(A - \lambda I_n)$ alors $-\lambda Y \in \text{Im}(A - \lambda I_n)$ et il existe $X_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)X_1 = -\lambda Y$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix} \in E_\lambda(B) \text{ et } \Phi \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix} \right) = Y$$

$$\text{Donc } \text{Im}(\Phi) = E_\lambda(A) \cap \text{Im}(A - \lambda I_n)$$

On en déduit par la formule du rang :

$$\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_\lambda(A)) + \dim(E_\lambda(A) \cap \text{Im}(A - \lambda I_n))$$

Supposons B diagonalisable.

$$2n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) \leq 2 \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq 2n$$

$$\text{Donc } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n \text{ et } A \text{ est diagonalisable}$$

Classiquement $E_\lambda(A)$ et $\text{Im}(A - \lambda I_n)$ sont alors supplémentaires donc :

$$2n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$$

C'est absurde donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 (Mines 2023)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre p .

1. Montrer que $p \leq n$.

$$2. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Correction

1. $A^p = 0$ donc le polynôme X^p annule A .

A n'a donc qu'une seule valeur propre complexe possible : 0.

Mais χ_A est un polynôme unitaire de degré n donc par d'Alembert-Gauss, $\chi_A = X^n$.

Par Cayley-Hamilton $A^n = 0$.

Mais p est le plus petit entier k tel que $A^k = 0$ donc $p \leq n$.

2. $\chi_A = X^3$: c'est immédiat puisque A est triangulaire.

Par Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$.

Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

$$B^6 = A^3 = 0 \text{ donc } B^3 = 0.$$

On en déduit $B^4 = 0$.

$$\text{Mais } B^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est non nulle : on aboutit à une contradiction.}$$

Exercice 5 (X 2023)

Soit G une partie de $GL_2(\mathbb{R})$ qui contient la matrice I_2 et qui est stable par le produit matriciel et par passage à l'inverse.

On note $\text{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de G .

Montrer que $\text{Vect}(G)$ est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(1) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M de G , PMP^{-1} est triangulaire supérieure.

(2) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M de G , PMP^{-1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Correction

L'examineur a suggéré de commencer par montrer que ces deux conditions sont suffisantes. Il a également suggéré d'utiliser le produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $(A | B) = \text{tr}(A^T B)$. J'ajoute que l'intérêt d'introduire un produit scalaire est que :

$$\text{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \text{Vect}(G)^\perp = \{0\}$$

On commence donc par supposer que la condition (1) est vérifiée.

On remarque que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale à toutes les matrices triangulaires supérieures.

Soit $B = P^T A (P^T)^{-1} = P^T A (P^{-1})^T$.

$$\begin{aligned} \forall M \in G (M | B) &= \text{tr}(M^T B) = \text{tr}(M^T P^T A (P^{-1})^T) \\ &= \text{tr}\left(\left(P^{-1}\right)^T M^T P^T A\right) = \text{tr}\left(\left(PMP^{-1}\right)^T A\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit facilement :

$$\forall M \in \text{Vect}(G) (M | B) = 0$$

Mais la matrice B est non nulle car A est non nulle et les matrices P^T et $(P^T)^{-1}$ sont inversibles. Donc $\text{Vect}(G)$ est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet $\text{Vect}(G)$ est inclus dans l'hyperplan $B^\perp$.

On suppose ensuite que la propriété (2) est vraie.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale à toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

On montre alors comme dans le premier cas que $\text{Vect}(G)$ est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on suppose que $\text{Vect}(G)$ est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Il existe donc un hyperplan H qui contient $\text{Vect}(G)$.

$H^\perp$ est une droite et on note A une matrice non nulle de cette droite.

$$\forall M \in \text{Vect}(G) \text{tr}(A^T M) = 0$$

$$\begin{aligned} \forall (G_1, G_2) \in G^2 \text{tr}(A^T G_1 G_2) &= 0 \text{ car } G_1 G_2 \in G \\ &= \text{tr}(G_2 A^T G_1) = \text{tr}\left(\left(AG_2^T\right)^T G_1\right) \end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit :

$$\forall (M, G_2) \in \text{Vect}(G) \times G \left(AG_2^T | M\right) = 0$$

On a donc, pour tout $M \in G$, AM^T est orthogonal à $\text{Vect}(G)$.

$\text{Vect}(G)$ est différent de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4 et contient I_2 donc la dimension de $\text{Vect}(G)$ vaut 1, 2 ou 3.

Si elle vaut 3 alors $\text{Vect}(G) = H$ et pour tout $M \in G$, il existe $\lambda_M \in \mathbb{R}$ tel que $AM^T = \lambda_M A$.

En transposant, on obtient $MA^T = \lambda_M A^T$

La matrice A est non nulle donc la matrice A^T est aussi non nulle et :

$\exists X \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ tq $Y = A^T X \neq 0$

Y est un vecteur propre commun à toutes les matrices de G .

$Y \neq 0$ donc la famille (Y) est libre et on peut la compléter en (Y, Z) base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vers la base (Y, Z) et P son inverse alors :

$\forall M \in G$ $PM P^{-1}$ est triangulaire supérieure.

Si la dimension de $\text{Vect}(G)$ vaut 2 alors $\text{Vect}(G)$ a une base de la forme (I_2, B) avec $B \in G$.

Si χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$ alors il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $PBP^{-1} = T$ soit triangulaire supérieure.

Si $M \in G$ alors M est combinaison linéaire de I_2 et de B : il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $M = \lambda I_2 + \mu B$.

$PM P^{-1} = P(\lambda I_2 + \mu T)P^{-1}$ avec $\lambda I_2 + \mu T$ triangulaire supérieure.

Si χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors on a vu (mais ce n'est pas un résultat au programme) que B est semblable à une matrice C de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$\lambda I_2 + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda + \mu a & -b \\ b & \lambda + \mu a \end{pmatrix}$ est également de cette forme.

On montre facilement comme dans le cas précédent que la propriété (2) est vraie.

Reste enfin le cas où $\text{Vect}(G)$ est de dimension 1.

$\text{Vect}(G) = \mathbb{R}I_2$ et en particulier $G \subset \mathbb{R}I_2$

La propriété (1) est vérifiée.