

Révisions 2025
Séries entières
18 juin 2025

941

Exercice 1 (CCP 2023)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$$

1. Montrer que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que F est impaire et strictement croissante.
(b) Montrer qu'en $+\infty$, F admet une limite qu'on ne cherchera pas à expliciter.

3. Déterminer les nombres a_n , $n \in \mathbb{N}$ tels que $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$

4. Exprimer $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $F(1)$.

5. Montrer que $\left| F(x) - \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1} \right| \leq \frac{1}{4p+5}$

En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge et expliciter $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ à l'aide de F .

Exercice 2 (CCP 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(t)$.
2. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} u_n$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \neq 0$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

5. On pose pour tout $x \in]-1; 1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.

Montrer :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad (x^2 - 1)g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = 0$$

6. Il restait deux questions où il fallait trouver des expressions de g dont l'une avec une intégrale.

Exercice 3 (CCP 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$.
2. Calculer explicitement $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$.

Exercice 4 (CCP 2023)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n}{n!}$$

1. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 .
2. (a) Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et de n .
(b) En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.
3. On note S la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} v_n x^n$.
(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
(b) Déterminer une équation différentielle dont S est solution.
4. Soit $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
(a) Développer f en série entière.
(b) ?

Exercice 5 (Mines 2023)

Etude de $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2k+1)} x^{2k+1}$

1. Rayon de convergence
2. Montrer que f est solution sur un certain intervalle de $(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$.
Expliciter f .

Exercice 6 (Centrale 2023)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n$.

1. Montrer :
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq a_n \leq n^2$
et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n e^{-2x}$$

Exercice 7 (*Centrale 2023*)

Soit : $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que $\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y) \ln(1-y)$

Exercice 8 (*Ens 2023*)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ périodique :

$\exists T \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+T} = a_n$

Que peut-on dire de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

Exercice 9 (*X 2023*)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \frac{n+4}{n+1} a_{n+1} + \frac{3n+7}{n+2} a_n.$$

Proposer une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 10 (*Mines 2024*)

On cherche à résoudre $(E) : x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E) .
2. Le candidat n'a pas donné de précision sur la suite, qui n'est pas traitable sans indication dans l'état actuel du programme.