Révisions 2025
Séries entières
18 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que F est impaire et strictement croissante.
   (b) Montrer qu'en $+\infty$, F admet une limite qu'on ne cherchera pas à expliciter.
3. Déterminer les nombres a_n, $n \in \mathbb{N}$ tels que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$
4. Exprimer $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $F(1)$.
5. Montrer que $\left| F(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1} \right| \leq \dfrac{1}{4p+5}$

   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge et expliciter $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ à l'aide de F.

Correction

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est bien définie, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
   Mais en fait $F' = f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) La fonction $G : x \mapsto F(x) + F(-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ G'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$ car f est paire.
   La fonction G est constante.
   On en déduit :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ F(x) + F(-x) = G(x) = G(0) = F(0) + F(0) = 0 + 0 = 0$
   Donc :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ F(-x) = -F(x)$: F est impaire.

   $\forall x \in \mathbb{R}\ F'(x) = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} > 0$
   On en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   On en déduit $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \in \mathbb{R}$

3.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-(2n-1)/2)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{4n}$
On peut intégrer terme à terme une série entière sur son domaine de convergence donc :
$\forall x \in]-1;1[\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$

4. La fonction $H : x \mapsto F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ H'(x) &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{x^2\sqrt{1+1/x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc la fonction H est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2F(1)$
F étant impaire :
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*\ F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = -2F(1)$

5. On fixe $x \in]-1;1[$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ (-1)^n \times (-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est du signe de x ($x^{4n} \geq 0$)
Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ est alternée.
Si on note $b_n = \left|(-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\right| = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{|x|^{4n+1}}{4n+1}$, on a :
$\forall b_{n+1} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)(4n+1)}{4(n+1)^2(4n+3)} x^4 b_n = \dfrac{(2n+1)(4n+1)}{(2n+2)(4n+3)} x^4 b_n \leq b_n$
Donc la suite $\left(\left|(-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Enfin $(-1)^n \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{x^{4n+1}}{4n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car on sait déjà que la série converge.

D'après le théorème sur la convergence de certaines séries alternées :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ \left|F(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}\right| &= \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^{p+1}(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2 (4p+5)} x^{4p+5}\right| \\ &\leq \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2p+1) \times (2p+2)}{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times \cdots \times (2p+2) \times (2p+2)} \frac{|x|^{4p+5}}{4p+5} \\ &\leq \frac{1}{4p+5}\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers 1 (F est continue en 1 ainsi que la somme finie), on obtient :
$\forall p \in \mathbb{N}\ \left|F(1) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right| \leq \frac{1}{4p+5} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$
Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} = F(1)$.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^n(t)$.
2. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} u_n$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \neq 0$.
   Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_{2n+1} x^{2n+1}$.
5. On pose pour tout $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} x^{2n+1}$.
   Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ (x^2-1)g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = 0$
6. Il restait deux questions où il fallait trouver des expressions de g dont l'une avec une intégrale.

Correction

1. Si $t = 0(2\pi)$ alors la suite $(\cos^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
   Si $t = \pi(2\pi)$ alors la suite $(\cos^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
   Si $t \neq 0(\pi)$ alors la suite $(\cos^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos^n(t) \end{cases}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers $f\begin{cases}\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}\\ t\mapsto 0 \text{ si } t>0\\ 0\mapsto 1\end{cases}$.
- f est continue par morceaux sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
- L'hypothèse de domination est vérifiée :
  $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\ \ |f_n(t)|\le 1$
  avec $t\mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

3.

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2}\cos(t)\cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(t)(n+1)(-\sin(t))\cos^n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\pi/2}\Big(1-\cos^2(t)\Big)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}
\end{aligned}$$

On conclut facilement.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, positive et différente de la fonction nulle donc :
   $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n>0$

   Soit $r>0$.
   $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{2n+1}r^{2n+1}>0$
   $\dfrac{u_{2n+3}r^{2n+3}}{u_{2n+1}r^{2n+1}} = \dfrac{2n+2}{2n+3}r^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r^2$.
   Si $r<1$ alors $r^2<1$ et par la règle de d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_{2n+1}r^{2n+1}$ converge.
   Si $r>1$ alors $r^2>1$ et par la règle de d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_{2n+1}r^{2n+1}$ diverge.
   Donc le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_{2n+1}x^{2n+1}$ vaut 1.

5.

$$
\begin{aligned}
& \forall x \in]-1;1[\ (x^2-1)g''(x)+3xg'(x)+g(x) \\
= & \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)2nu_{2n+1}x^{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)2nu_{2n+1}x^{2n-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)u_{2n+1}x^{2n+1} \\
& +\sum_{n=0}^{+\infty}u_{2n+1}x^{2n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)2nu_{2n+1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+3)2(n+1)u_{2n+3}x^{2n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(3(2n+1)+1\right)u_{2n+1}x^{2n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty}\left((2n+3)(2n+1)+1\right)u_{2n+1}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}4(n+1)^2u_{2n+1}x^{2n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{+\infty}\left(4n^2+8n+4-4n^2-8n-4\right)u_{2n+1}x^{2n+1} \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
& \forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-1;1[\ \sum_{n=0}^{N}u_{2n+1}x^{2n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{N}\left(x^{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
= & \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{N}x^{2n+1}\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
= & \int_0^{\pi/2}x\cos(t)\frac{1-x^{2N+2}\cos^{2N+2}(t)}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
= & \int_0^{\pi/2}\frac{x\cos(t)}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2N+3}\cos^{2N+3}(t)}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Mais :

$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-1;1[\ \left|\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2N+3}\cos^{2N+3}(t)}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq |x|^{2N+3}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

En fixant $x \in]-1;1[$ et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $g(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{x\cos(t)}{1-x^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 *(CCP 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}H_nx^n$.
2. Calculer explicitement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}H_nx^n$.

Correction

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ H_n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1)$
   et
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ H_n \leq 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln(n)$
   $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ et $1+\ln(n) \sim \ln(n)$ donc $H_n \sim \ln(n)$
   On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ est égal au rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) x^n$.
   Soit $r > 0$.
   $\forall n \geq 2\ \ln(n) r^n > 0$
   $\dfrac{\ln(n+1)r^{n+1}}{\ln(n)r^n} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$
   D'après la règle de d'Alembert :
   Si $r < 1$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) r^n$ converge.
   Si $r > 1$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(n) r^n$ diverge grossièrement.
   Donc le rayon de convergence cherché est 1.
   De plus les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} H_n 1^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} H_n (-1)^n$ divergent grossièrement.
2. Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et $a_k = \dfrac{1}{k}$ pour $k > 0$ ont un rayon de convergence égal à 1 donc par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[\ \frac{-\ln(1-x)}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} H_n x^n
\end{aligned}$$

Exercice 4 *(CCP 2023)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}$
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \dfrac{u_n}{n!}$

1. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.
2. (a) Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.
3. On note S la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n x^n$.
   (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

(b) Déterminer une équation différentielle dont S est solution.

4. Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

(a) Développer f en série entière.

(b) ?

Correction

1. $v_0 = \dfrac{u_0}{0!} = 1$
$u_1 = u_0 - 1 = 0$, $v_1 = 0$
$u_2 = 2u_1 + 1 = 1$, $v_2 = \dfrac{1}{2}$
$u_3 = 3u_2 - 1 = 2$, $v_3 = \dfrac{1}{3}$

2. (a)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)u_n + (-1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{u_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n &= v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) converge vers e^{-1}.

3. (a) (v_n) converge vers $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$ donc $|v_n| \sim \mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit :
$R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} v_n x^n\right) = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} ex^{-1}x^n\right) = 1.$

(b) S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[\ S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n v_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) v_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right) x^n \\ &= xS'(x) + S(x) - \mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

S est donc solution sur $]-1;1[$ de $(1-x)y' - y = -\mathrm{e}^{-x}$

4. (a)

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1;1[\ f(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n \text{ les deux séries sont absolument convergentes} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\end{aligned}$$

(b) ?

Exercice 5 *(Mines 2023)*

Etude de $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2k+1)} x^{2k+1}$

1. Rayon de convergence
2. Montrer que f est solution sur un certain intervalle de $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0$. Expliciter f.

Correction

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $a_k = \frac{k!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2k+1)}$.
   Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.
   $\forall k \in \mathbb{N}\ a_k r^{2k+1} > 0$
   $\frac{a_{k+1} r^{2k+3}}{a_k r^{2k+1}} = \frac{k+1}{2k+3} r^2 \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{r^2}{2}$
   Si $r < \sqrt{2}$ alors $\frac{r^2}{2} < 1$ et la série de terme général $a_k r^{2k+1}$ converge.
   Si $r > \sqrt{2}$ alors $\frac{r^2}{2} > 1$ et la série de terme général $a_k r^{2k+1}$ diverge.
   Donc $R = \sqrt{2}$.
2. D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[\ (x^2-2)f'(x) + xf(x) + 2 \\
= \ & x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) a_k x^{2k} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) a_k x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k+2} + 2 \\
= \ & \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1) a_k x^{2k+2} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) a_k x^{2k} \\
= \ & \sum_{k=1}^{+\infty} 2k a_{k-1} x^{2k} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1) a_k x^{2k} \\
= \ & 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k a_{k-1} - (2k+1) a_k\right) x^{2k} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} 0 x^{2k} \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

   On résout ensuite l'équation différentielle.
   $\forall x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[\ x^2 - 2 < 0$
   ESSM : $y' = -\frac{x}{x^2-2} y$
   $\int \frac{x}{x^2-2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(\left|x^2-2\right|\right) = \frac{1}{2} \ln\left(2 - x^2\right)$
   Solution générale : $y = \frac{C}{\sqrt{2-x^2}}$
   Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :
   $(x^2-2)\frac{C'(x)}{\sqrt{2-x^2}} + 2 = 0$

$C'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sqrt{2-2t^2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \text{ changement de variable } x=\sqrt{2}t \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin(t) \\ &= 2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[\ f(x) = \dfrac{2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}} + \dfrac{C}{\sqrt{2-x^2}}$

Or $f(0)=0$ donc :

$\forall x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[\ f(x) = \dfrac{2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}$

Exercice 6 *(Centrale 2023)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{2}{n+2}a_n$.

1. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 \leq a_n \leq n^2$
   et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer :
   $\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n\,\mathrm{e}^{-2x}$

Correction

1. Pour tout $n \geq 2$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![1;n]\!]\ 1 \leq a_k \leq k^2$.
   $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (avec n un entier supérieur ou égal à 2.
   $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \geq 1 + \dfrac{2}{n+1} \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = \frac{n^2(n+1)+2(n-1)^2}{n+1} \\ &\leq \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leq \frac{n^3+3n^2+2}{n+1} \\ &\leq \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^3}{n+1} \\ &\leq (n+1)^2 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Si $x > 1$ alors :

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n x^n \geq x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Donc $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
Si $0 < x < 1$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n x^n \leq n^2 x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $a_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On en déduit $R = 1$.

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1;1[\ S(x) &= 1 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} \\ &= 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+1} + \frac{2}{n+2} a_n\right) x^{n+2} \\ &= 1 + x + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{aligned}$$

La séparation de la somme en 2 est légitime : la somme complète converge et un des deux termes de la séparation (celui de gauche) converge assurément.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1;1[\ S(x) &= 1 + x + x\,(S(x) - 1) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+2}}{n+2} \\ S'(x) &= 1 + S(x) - 1 + xS'(x) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= = S(x) + xS'(x) + 2xS(x) \end{aligned}$$

S est solution sur $]-1;1[$ de $(1-x)y' = (2x+1)y$
$\displaystyle\int \frac{2x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-2+3}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(-2 + \frac{3}{1-x}\right)\mathrm{d}x = -2x - 3\ln(1-x)$
Compte tenu de $S(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{(1-x)^3}}$$

3. $\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
En dérivant deux fois, on obtient :
$\forall x \in]-1;1[\ \dfrac{2}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n$
Finalement :
$\forall x \in]-1;1[\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n\, \mathrm{e}^{-2x}$

Exercice 7 *(Centrale 2023)*

Soit : $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$

Correction

1. $\displaystyle\forall x \in]-1;1[\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{n} \end{cases}$.

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $]0;1[$ (elle est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0;1]$).
   - La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0;1[$ et sa somme est continue : c'est la fonction $\begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \end{cases}$.
   - La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{n^2}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2}$

   On en déduit :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

2. La fonction S est la somme d'une série entière.
   Soit $r > 0$.
   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \frac{r^n}{n^2} > 0$
   $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.
   Par la règle de d'Alembert :
   Si $r < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge.
   Si $r > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ diverge.
   Donc le rayon de convergence vaut 1.
   Mais :
   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ |f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente
   Donc la série entière converge normalement sur $[-1;1]$.
   On en déduit que la fonction S est continue sur $[-1;1]$.
   De plus, la fonction $f : y \mapsto S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$

avec :

$$\begin{array}{rcl}\forall y \in]0;1[\ f'(y) & = & S'(y) - S'(1-y) + \dfrac{\ln(1-y)}{y} - \dfrac{\ln(y)}{1-y} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-y)^{n-1}}{n} + \frac{\ln(1-y)}{y} - \frac{\ln(y)}{1-y} \\ & = & -\dfrac{\ln(1-y)}{y} + \dfrac{\ln(1-(1-y))}{1-y} + \dfrac{\ln(1-y)}{y} - \dfrac{\ln(y)}{1-y} \\ & = & 0\end{array}$$

Donc f est constante sur $]0;1[$.
$\ln(y)\ln(1-y) \sim_{0^+} -y\ln(y) \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0$ donc :
$f(y) \xrightarrow[\substack{y\to 0\\ y>0}]{} S(0) + S(1) + 0 = S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
On peut se demander à quoi sert la première question.
Je pense que le concepteur du sujet avait en tête le calcul suivant :
S, comme toute série entière, est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence donc :
$\forall y \in]0;1[\ S(1-y) = S(0) + \displaystyle\int_0^{1-y} S'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{1-y} \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$
On en déduit $S(1-y) \xrightarrow[\substack{y\to 0\\ y>0}]{} -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 8 *(Ens 2023)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ périodique :
$\exists T \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+T} = a_n$
Que peut-on dire de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

Correction
Si tous les a_n sont nuls, il n'y pas grand chose à dire.
On suppose désormais qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \neq 0$.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est bornée donc $R \geq 1$.
La suite extraite $(a_{n_0+kT})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (elle est constante non nulle) donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et $R \leq 1$.
Le rayon de convergence est donc égal à 1.

$$\begin{array}{rcl}\forall z \in D(0;1)\ S(z) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{T-1} a_n z^n + \sum_{n=T}^{+\infty} a_n z^n \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{T-1} a_n z^n + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{T+k} z^{T+k} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{T-1} a_n z^n + z^T \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{T-1} a_n z^n + z^T S(z)\end{array}$$

et finalement :

$$\forall z \in D(0;1)\ S(z) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{T-1} a_n z^n}{1 - z^T}$$

Exercice 9 *(X 2023)*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+2} = \dfrac{n+4}{n+1}a_{n+1} + \dfrac{3n+7}{n+2}a_n$.
Proposer une minoration du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Correction
La suite nulle vérifie cette relation de récurrence donc le rayon de convergence peut être infini.
$\forall n \in \mathbb{N}\ n+4-4(n+1) = -3n \leq 0$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ n+4 \leq 4(n+1)$ et $\dfrac{n+4}{n+1} \leq 4$
$\forall n \in \mathbb{N}\ 3n+7-4(n+2) = -1-n \leq 0$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 3n+7 \leq 4(n+2)$ et $\dfrac{3n+7}{n+2} \leq 4$
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_{n+2}| \leq 4\left(|a_n| + |a_{n+1}|\right)$
Si on introduit $M_n = \max\left(a_0, \dots, a_n\right)$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_{n+2}| \leq 8M_{n+1}$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ M_{n+2} \leq 8M_{n+1}$
Donc $M_n = O\left(8^n\right)$ et $a_n = O\left(8^n\right)$ car $|a_n| \leq M_n$.
Donc $R_{CV}\left(\sum a_n x^n\right) \geq R_{CV}\left(\sum 8^n x^n\right) = \dfrac{1}{8}$.

On peut faire mieux.
$\dfrac{n+4}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{3n+7}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \dfrac{n+4}{n+1} \leq 1+\epsilon$ et $\dfrac{3n+7}{n+2} \leq 3+\epsilon$
$\forall n \geq n_0\ \ |a_{n+2}| \leq (1+\epsilon)a_{n+1} + (3+\epsilon)a_n$
On introduit alors la suite $(b_n)_{n\geq n_0}$ telle que $b_{n_0} = a_{n_0}$ et $b_{n_0+1} = a_{n_0+1}$ et :
$\forall n \geq n_0\ \ |b_{n+2}| \leq (1+\epsilon)b_{n+1} + (3+\epsilon)b_n$
On montre facilement par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq b_n$
On cherche ensuite les racines du polynôme $X^2 - (1+\epsilon)X - (3+\epsilon)$.
$\Delta = (1+\epsilon)^2 + 4(3+\epsilon) = 13 + 6\epsilon + \epsilon^2 > 0$.
D'où : $r_1 = \dfrac{1+\epsilon-\sqrt{13+6\epsilon+\epsilon^2}}{2} \simeq \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$
et $r_2 = \dfrac{1+\epsilon+\sqrt{13+6\epsilon+\epsilon^2}}{2} \simeq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$
$|r_1| < r_2$ donc $b_n = O\left(r_2^n\right)$.
On en déduit $a_n = O\left(r_2^n\right)$ puis :
$R_{CV}\left(\sum a_n x^n\right) \geq \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{2}{1+\sqrt{13}} = \dfrac{2(\sqrt{13}-1)}{12} = \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}$

$\dfrac{\sqrt{13}-1}{6} \simeq 0,434$ et $\dfrac{1}{8} = 0,125$

Exercice 10 *(Mines 2024)*

On cherche à résoudre $(E) : x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 2$.

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. Le candidat n'a pas donné de précision sur la suite, qui n'est pas traitable sans indication dans l'état actuel du programme.

Correction

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme.

$$
\begin{aligned}
& \forall x \in]-R;R[; x(x+1)S''(x) + (x+2)S'(x) - S(x) \\
= \quad & x(x+1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x+2)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \quad & \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
& S \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R;R[\\
\iff & \begin{cases} 2a_1 - a_0 = 2 \\ \forall n \geq 1 \ (n^2-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+1} = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_1 = 1 + \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 2 \ n(n+1)a_n = -n(n-2)a_{n-1} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_1 = 1 + \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 2 \ a_n = -\dfrac{n-2}{n+1}a_{n-1} \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a_1 = 1 + \dfrac{a_0}{2} \\ \forall n \geq 2 \ a_n = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Réciproquement, le rayon de convergence est évidemment infini.

Les solutions développables en série entière de (E) sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_0 + \left(1 + \dfrac{a_0}{2}\right)x \end{cases}$