Révisions 2025
Algèbre bilinéaire
19 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Trouver les conditions sur θ pour que M soit diagonalisable.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

Soit $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $S_n = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$.

1. Calculer $(AZ)^T Z$.
2. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de A telle que :
   $\forall A \in O(n) \ \ |S_n| \leq C$

Exercice 3 *(Ens 2023)*

Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\,(A) = 3$, $\mathrm{tr}\,(A^2) = 5$ et $\mathrm{tr}\,(A^3) = 9$.
Déterminer la borne inférieure de $\mathrm{tr}\,(M^2)$ lorsque M décrit $\{M \in S_3(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathrm{tr}\,(AM) = \mathrm{tr}\,(A^2 M) = 1\}$.

Exercice 4 *(Ens 2023)*

Que peut-on dire d'une matrice à la fois triangulaire et orthogonale ?

- Est-ce que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AB et BA sont semblables ?
- Est-ce que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AA^T et $A^T A$ sont semblables ?
- Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
  Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $m \in [\![1; n]\!]$.
  Soit p_F la projection orthogonale sur F.
  Soit p_G la projection orthogonale sur G.
  Montrer que $\mathrm{Sp}(p_F \circ p_G) = \mathrm{Sp}(p_G \circ p_F) \subset [0; 1]$.

Exercice 5 *(Centrale 2023)*

Etant donnés n réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on se demande si il existe S matrice symétrique à coefficients réels positifs telle que les valeurs propres de S comptées avec leurs multiplicités soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs, S existe.
2. (a) Qu'en est-il pour $n = 2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 1)$?
   (b) Qu'en est-il pour $n = 3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, 1)$?
   (c) Qu'en est-il pour $n = 3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -1, 0)$?
   (d) Qu'en est-il pour $n = 4$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1, -1, 1, 1)$?
3. Soit H la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{R}$ et les autres à $b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs propres de H.
4. Ecrire une fonction Python qui génère une matrice symétrique dont les coefficients sont dans $]0; 1[$.
   La suite de l'exercice ne m'est pas parvenue. Ce qui suit est une tentative de reconstruction de l'énoncé.
5. Examiner le spectre de matrices symétriques à coefficients pris aléatoirement dans $[0; 1[$. Qu'observe-t-on pour la plus grande et la plus petite valeur propre ?
   Démontrer votre conjecture.
6. Pour $n = 2$, donner une CNS sur (λ_1, λ_2) pour qu'il existe S matrice symétrique à deux lignes et deux colonnes et à coefficients réels positifs dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det\left(MM^T\right) \geq 0$.
2. Soit $A_1, \dots, A_n$ n parties de $[\![1; m]\!]$.
   Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2 \ b_{i,j} = \mathrm{Card}(A_i \cap A_j)$
   Montrer que $\det(B) \geq 0$.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $M \in O(n)$.

Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}\right| \leq n \leq \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Définition d'une matrice orthogonale.
2. Montrer que $\begin{cases} E^2 \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^T B\right) \end{cases}$ est un produit scalaire.
3. On donne `ortho(n)` qui donne une matrice aléatoire $A \in O(n)$ et `norm_matr(A)` qui sont importées d'un module de Centrale.
   Par exemple, je propose pour `ortho(n)`

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd
```

```
def ortho(n):
    N=rd.randint(1,21)
    A=np.eye(n)
    if N%2==0:
        for i in range(n):
            A[i,i]=-1
    for a in range(n):
        B=np.eye(n)
        v=rd.random(n)
        for i in range(n):
            v[i]=2*v[i]-1
        s=sum(v[i]**2 for i in range(n))
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                B[i,j]-=2*v[i]*v[j]/s
        A=np.dot(A,B)
    return(A)
```

`norm_matr(A)` calcule la norme de la matrice A pour la norme euclidienne associée au produit scalaire de la question 2.

```
def norm_matr(A):
    return np.sqrt(np.trace(np.dot(np.transpose(A),A)))
```

On demande d'écrire `moy(A,p)` qui donne $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

On demande d'afficher les 50 premiers termes de la suite de terme général $\left\|\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right\|$ avec $n=5$ et $A \in O(n)$ aléatoire.
Afficher le spectre de A et faire une conjecture sur la limite selon que 1 est ou non valeur propre de A.

4. On suppose que $A \in O(n)$ et $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left((I_n - A)\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$.
5. Soit $A \in O(n)$.
   Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(A - I_n) \textcircled{\perp} \mathrm{Im}\,(A - In)$.
6. On suppose que $A \in O(n)$ et $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$.