Révisions 2025
Algèbre bilinéaire
19 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

Soit $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Trouver les conditions sur θ pour que M soit diagonalisable.

Correction
$\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}\,(M)X + \det(M) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1 = \left(X - \mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\theta}\right)$
Si $\theta = 0(2\pi)$ alors $M = I_2$ est diagonale donc diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).
Si $\theta = \pi(2\pi)$ alors $M = -I_2$ est diagonale donc diagonalisable (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$).
Si $\theta \neq 0(\pi)$ alors χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Par contre, χ_M est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 2 *(CCP 2023)*

Soit $n \geq 2$, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$.

1. Calculer $(AZ)^T Z$.
2. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de A telle que :
   $\forall A \in O(n)\ \ |S_n| \leq C$

Correction

1.

$$\begin{aligned} (AZ)^T Z &= \sum_{k=0}^{n} (AZ)_k z_k = \sum_{k=1}^{n} (AZ)_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} z_l \right) \\ &= S_n \end{aligned}$$

2. $\forall A \in O(n)\ \ |S_n| = |(AZ \mid Z)| \leq \|AZ\|\,\|Z\|$ par Cauchy-Schwartz
   A conservant la norme, on en déduit :
   $\forall A \in O(n)\ \ |S_n| \leq \|Z\|^2 = n$

Exercice 3 *(Ens 2023)*

Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 3$, $\operatorname{tr}(A^2) = 5$ et $\operatorname{tr}(A^3) = 9$.
Déterminer la borne inférieure de $\operatorname{tr}(M^2)$ lorsque M décrit $\{M \in S_3(\mathbb{R}) \text{ tq } \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(A^2M) = 1\}$.

Correction
L'examinateur a commencé par demander si une telle matrice A pouvait exister.
Supposons qu'elle existe.
Le théorème spectral permet de montrer que $A = PDP^T = PDP^{-1}$ avec $P \in O(3)$ et $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
On a alors $A^2 = PD^2P^T$ avec $D^2 = \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ et
$A^3 = PD^3P^T$ avec $D^3 = \operatorname{Diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3)$.

λ_1, λ_2 et λ_3 sont donc trois réels tels que $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 5 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 9 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) &= (X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2)(X - \lambda_3) \\ &= X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= X^3 - 3X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$ donc :
$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \dfrac{1}{2}(9 - 5) = 2$

$$\begin{aligned} 6 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3^2 \\ &= \lambda_1^2(3 - \lambda_1) + \lambda_2^2(3 - \lambda_2) + \lambda_3^2(3 - \lambda_3) + 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= 3 \times 15 - 9 + 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6 + 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

Donc $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.
Donc $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2)$.
Réciproquement, si A est de la forme $P\operatorname{Diag}(0, 1, 2)P^T$ avec $P \in O(3)$, $A \in S_3(\mathbb{R})$ et :
$\operatorname{tr}(A) = 0 + 1 + 2 = 3$, $\operatorname{tr}(A^2) = 0 + 1 + 4 = 5$ et $\operatorname{tr}(A^3) = 0 + 1 + 8 = 9$.

On va commencer par le cas de la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$.

$DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & d & e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix}$ et $D^2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & d & e \\ 2c & 2e & 4f \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \operatorname{tr}(DM) = 1 \\ \operatorname{tr}(D^2M) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d + 2f = 1 \\ d + 4f = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1 \\ f = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 1 & e \\ c & e & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ? & ? \\ ? & b^2 + 1 + e^2 & ? \\ ? & ? & c^2 + e^2 \end{pmatrix}$ de trace égale à $a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2e^2 + 1$.

La borne inférieure cherchée est donc un minimum, égal à 1, atteint une fois et une seule pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Passons au cas général.
Soit $A \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\,(A) = 3$, $\mathrm{tr}\,(A^2) = 5$ et $\mathrm{tr}\,(A^3) = 9$.
Il existe $P \in O(3)$ telle que $A = PDP^T$ avec D la matrice diagonale de la question précédente.
Soit $M \in S_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}\,(AM) = \mathrm{tr}\,(A^2M) = 1$.
$\mathrm{tr}\,(AM) = \mathrm{tr}\,(PDP^TM) = \mathrm{tr}\,(DP^TMP)$ avec $(P^TMP)^T = P^TM^TP = P^TMP$ ie $P^TMP \in S_3(\mathbb{R})$
$\mathrm{tr}\,(A^2M) = \mathrm{tr}\,(PD^2P^TM) = \mathrm{tr}\,(D^2P^TMP)$
D'après ce qui précède, $\mathrm{tr}\,(M^2) \geq 1$.
Soit $M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^T = PM_0P^T$.
C'est une matrice symétrique.
$\mathrm{tr}\,(AM) = \mathrm{tr}\,(PDP^TPM_0P^T) = \mathrm{tr}\,(PDM_0P^T) = \mathrm{tr}\,(DM_0) = 1$ car $P^T = P^{-1}$
$\mathrm{tr}\,(A^2M) = \mathrm{tr}\,(PD^2P^TPM_0P^T) = \mathrm{tr}\,(PD^2M_0P^T) = \mathrm{tr}\,(D^2M_0) = 1$
De plus $\mathrm{tr}\,(M^2) = \mathrm{tr}\,(PM_0^2P^T) = \mathrm{tr}\,(M_0^2) = 1$ donc la borne inférieure cherchée vaut 1.

Exercice 4 *(Ens 2023)*

Que peut-on dire d'une matrice à la fois triangulaire et orthogonale ?

Correction
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure et orthogonale.
Les colonnes de T sont normées donc $t_{1,1} = \pm 1$.
Les colonnes de T sont orthogonales donc $t_{1,2} = 0$.
Les colonnes de T sont normées donc $t_{2,2} = \pm 1$.
En itérant le procédé, on montre que T est diagonale avec les coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1.
Si T est triangulaire inférieure et orthogonale alors sa transposée est triangulaire supérieure et orthogonale.
On déduit alors de ce qui précède que T est diagonale avec les coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1.
La réciproque est triviale.

- Est-ce que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AB et BA sont semblables ?
- Est-ce que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, AA^T et A^TA sont semblables ?
- Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
  Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $m \in [\![1; n]\!]$.
  Soit p_F la projection orthogonale sur F.
  Soit p_G la projection orthogonale sur G.
  Montrer que $\mathrm{Sp}(p_F \circ p_G) = \mathrm{Sp}(p_G \circ p_F) \subset [0; 1]$.

Correction

- La réponse à cette question est non et elle se justifie en donnant un contre-exemple.
  Néanmoins dans le cadre de l'épreuve, un candidat peut affirmer un certain nombre de choses :
  — Si A est inversible alors AB et BA sont semblables car $AB = A(BA)A^{-1}$.
  Idem si B est inversible.

— $\chi_{AB} = \chi_{BA}$: la preuve a été faite en cours.
Problème : deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique mais deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique ne sont pas forcément semblables.

— On peut étudier le cas $n = 2$.
Si $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ alors AB et BA sont semblables car semblables à une même diagonale réelle.
Si $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ a deux racines complexes conjuguées (non réelles) $a + ib$ et $a - ib$ alors AB et BA sont semblables car semblables à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Si $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ a une racine réelle double non nulle alors AB et BA sont semblables car A (et B) sont inversibles.
Reste le cas $\chi_{AB} = \chi_{BA} = X^2$.
Pour chacune des deux matrices, le noyau est de dimension 1 ou 2. Il est possible que les deux dimensions soient différentes. En clair, on peut avoir $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
Cherchons un exemple.
$AB = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$.
A et B ne sont pas inversibles ne sont pas nulles donc on cherche A et B tels que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Im}\,(B)$. On prend arbitrairement cet espace dirigé par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On cherche donc A de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ et B de la forme $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a bien $AB = 0$.
$BA = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Avec $a_1 = b_1 = 1$ et $a_2 = b_2 = 0$ ie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB = 0$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.
En taille quelconque, on prend $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$A_1B_1 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nulle et $B_1A_1 = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle donc A_1B_1 et B_1A_1 ne sont pas semblables.

- Cet exercice a été traité le lundi 5 juin 2023.
- Le cas $m = n$ est sans intérêt : $F = G = E$ et $p_F = p_G = id_E$.
(Le cas $m = 0$ est du même acabit : $F = G = \{0\}$ et $p_F = p_G = 0$).
Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une BON de E telle que $(f_1, \ldots, f_m)$ soit une BON de F.
Soient $(g_1, \ldots, g_n)$ une BON de E telle que $(g_1, \ldots, g_m)$ soit une BON de G.

$$\begin{aligned}
\forall x \in E\ (p_F \circ p_G)(x) &= p_F\left(\sum_{k=1}^{m} (g_k \mid x) g_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(f_k \mid \sum_{l=1}^{m} (g_l \mid x) g_l\right) f_k
\end{aligned}$$

Si on note M la matrice la matrice de $p_F \circ p_G$ dans la base $(f_1, \dots, f_n)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} m_{i,j} & = & (f_i \mid (p_F \circ p_G)(f_j)) \\ & = & 0 \text{ si } i > m \\ & = & \left(f_i \mid \sum_{l=1}^{m} (g_l \mid f_j) g_l\right) \text{ si } i \leq m \\ & = & \sum_{l=1}^{m} (g_l \mid f_j)(f_i \mid g_l) \\ & = & \sum_{l=1}^{m} (f_i \mid g_l)(g_l \mid f_j) \end{array}$$

Soit $A = ((f_i \mid g_j))_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.
$\forall (i,j) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $(AA^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{m} (f_i \mid g_k)(f_j \mid g_k) = m_{i,j}$
Donc M est de la forme $\begin{pmatrix} AA^T & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On en déduit $\chi_M = X^{n-m} \chi_{AA^T}$
De même, si on note N la matrice de $p_G \circ p_F$ dans la base $(g_1, \dots, g_n)$, N est de la forme $\begin{pmatrix} BB^T & N_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = ((g_i \mid f_j))_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.
On remarque que $B = A^T$ de sorte que $\chi_N = X^{n-m} \chi_{BB^T} = X^{n-m} \chi_{A^T A} = \chi_M$.
Donc $p_F \circ p_G$ et $p_G \circ p_F$ ont le même spectre.
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^T AA^T X = (A^T X)^T (A^T X) = \left\| A^T X \right\|^2 \geq 0$
Donc la matrice AA^T est symétrique positive.
On en déduit que les racines de χ_{AA^T} sont toutes réelles et positives.
On en déduit que les racines de χ_M sont toutes réelles et positives.
Donc : $\mathrm{Sp}(p_F \circ p_G) = \mathrm{Sp}(p_G \circ p_F) \subset \mathbb{R}_+$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(p_F \circ p_G)$.
$\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $p_F(p_G(x)) = \lambda x$.
$\forall y \in E$ $y = p_F(y) + y - p_F(y)$ avec $p_F(y) \in F$ et $y - p_F(y) \in F^\perp$
D'après Pythagore :
$\forall y \in E$ $\|y\|^2 = \|p_F(y)\|^2 + \|y - p_F(y)\|^2 \geq \|p_F(y)\|^2$
On a évidemment le même résultat pour p_G.
Donc :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \|x\| & = & |\lambda| \, \|x\| \text{ car } \mathrm{Sp}(p_F \circ p_G) \subset \mathbb{R}_+ \\ & = & \|\lambda x\| = \|p_F(p_G(x))\| \\ & \leq & \|p_G(x)\| \\ & \leq & \|x\| \end{array}$$

x est non nul donc $\|x\| > 0$ et $\lambda \leq 1$.

Exercice 5 *(Centrale 2023)*

Etant donnés n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on se demande si il existe S matrice symétrique à coefficients réels positifs telle que les valeurs propres de S comptées avec leurs multiplicités soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs, S existe.
2. (a) Qu'en est-il pour $n = 2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 1)$?
   (b) Qu'en est-il pour $n = 3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, 1)$?
   (c) Qu'en est-il pour $n = 3$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -1, 0)$?
   (d) Qu'en est-il pour $n = 4$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-1, -1, 1, 1)$?
3. Soit H la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à $a \in \mathbb{R}$ et les autres à $b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs propres de H.
4. Ecrire une fonction Python qui génère une matrice symétrique dont les coefficients sont dans $]0; 1[$.
   La suite de l'exercice ne m'est pas parvenue. Ce qui suit est une tentative de reconstruction de l'énoncé.
5. Examiner le spectre de matrices symétriques à coefficients pris aléatoirement dans $[0; 1[$. Qu'observe-t-on pour la plus grande et la plus petite valeur propre ?
   Démontrer votre conjecture.
6. Pour $n = 2$, donner une CNS sur (λ_1, λ_2) pour qu'il existe S matrice symétrique à deux lignes et deux colonnes et à coefficients réels positifs dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2.

Correction

1. La matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ convient.
2. (a) Supposons que S existe.
   S étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Donc S est la matrice d'une symétrie, et même comme vu en cours d'une symétrie orthogonale.
   S est donc une matrice orthogonale de déterminant -1.
   On en déduit que $S = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   Les coefficients de S étant positifs, $\cos(\theta) = 0$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Réciproquement, on vérifie facilement que cette matrice convient. Il y a existence et unicité.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.
   (c) Ce cas n'est pas possible : la trace de S, qui est la somme de ses coefficients diagonaux, est positive (ou nulle).
   La somme de ses valeurs propres doit donc être positive.
   (d) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

3.

$$
\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_H(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & & & \\ -b & \lambda-a & -b & & -b \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b & \lambda-a & -b \\ -b & & & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-a-(n-1)b & \lambda-a-(n-1)b & & & \lambda-a-(n-1)b \\ -b & \lambda-a & -b & & -b \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b & \lambda-a & -b \\ -b & & & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en ajoutant toutes les lignes à la première} \\
&= (\lambda-(a+(n-1)b)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ -b & \lambda-a & -b & & -b \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b & \lambda-a & -b \\ -b & & & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-(a+(n-1)b)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ -b & \lambda-a+b & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \lambda-a+b & 0 \\ -b & & & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en retranchant la première colonne à toutes les autres} \\
&= (\lambda-(a+(n-1)b))\,(\lambda-(a-b))^{n-1}
\end{aligned}
$$

Les valeurs proches de H sont donc (si $a+(n-1)b \neq a-b$) $a+(n-1)b$ simple et $a-b$ de multiplicité $n-1$.

4.
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as alg

def S(n):
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i==j:
                A[i,j]=rd.random()
            else:
                a=rd.random()
                A[i,j]=a
                A[j,i]=a
    return(A)
```

5.
```
n=2
A=S(2)
print(alg.eigvals(A))
```

Si on note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, on observe $\lambda_1 + \lambda_n \geq 0$.
La trace de S est positive donc $0 \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq n\lambda_1$ donc $\lambda_1 \geq 0$.
Si $\lambda_n \geq 0$ alors $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geq 0$.
On suppose donc $\lambda_n < 0$.
Toutes les puissances de S sont à coefficients positifs (récurrence facile) donc leurs traces sont positives.
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^k \geq 0$
Si $0 \leq \lambda < \lambda_1$ alors $\lambda^k = o\left(\lambda_1^k\right)$.
Si $\lambda_n < \lambda \leq 0$ alors $\lambda^k = o\left(\lambda_n^k\right)$.
Donc si on note α_1 la multiplicité de λ_1 et α_n celle de λ_n, on a :
$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l^k \alpha_1 \lambda_1^k + \alpha_2 \lambda_n^k$
On en déduit pour k impair :
$\alpha_1 \lambda_1^k - \alpha_n \left|\lambda_n\right|^k \geq 0$
Cela impose $|\lambda_n| \leq \lambda_1$

6. Si S existe, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(S) \geq 0$
   Réciproquement, on suppose $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$.
   Quitte à renuméroter les λ, on peut supposer $\lambda_1 \geq \lambda_2$.
   On pose $a = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \geq 0$ et $b = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \geq 0$
   Les valeurs propres de H sont $a + b = \lambda_1$ et $a - b = \lambda_2$.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

1. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\det\left(MM^T\right) \geq 0$.
2. Soit $A_1, \ldots, A_n$ n parties de $[\![1; m]\!]$.
   Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2\ b_{i,j} = \operatorname{Card}(A_i \cap A_j)$
   Montrer que $\det(B) \geq 0$.

Correction

1. $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ donc $M^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
   Donc MM^T est bien définie et c'est une matrice *carrée* à n lignes et n colonnes.
   $\left(MM^T\right)^T = \left(M^T\right)^T M^T = MM^T$: MM^T est symétrique.
   $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T(MM^T) = (M^T X)^T(M^T X) = \left\|M^T X\right\|^2$ avec la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$
   Donc MM^T est symétrique positive.
   D'après le cours ses valeurs propres sont réelles positives.
   Le déterminant de MM^T, qui est le produit des valeurs propres de MM^T comptées avec leurs multiplicités est donc positif.

2. Soit $M = (1_{j\in A_i})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]\ \left(MM^T\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{m} m_{i,k}m_{j,k} = \sum_{k=1}^{m} 1_{k\in A_i}1_{k\in A_j}\\ &= \sum_{k=1}^{m} 1_{k\in A_i\cap A_j} = b_{i,j}\end{aligned}$$

$B = MM^T$ donc $\det(B)\geq 0$.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

Soit $M\in O(n)$.

Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| \leq n \leq \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Correction

Soit $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$MU = \begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{n,j}\end{pmatrix}$

Donc $\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| = (MU,U)$ et par Cauchy-Schwarz :

$\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| \leq \|MU\|\,\|U\|$

M étant une matrice orthogonale, $\|MU\| = \|U\|$ et :

$\left|\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\right| \leq \|U\|^2 = n$

$\forall j\in[\![1;n]\!]\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$

On en déduit :

$\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2\ m_{i,j}^2\leq 1$ puis $|m_{i,j}|\leq 1$

Donc :

$\forall (i,j)\in[\![1;n]\!]^2\ m_{i,j}^2\leq |m_{i,j}|$

En sommant, on obtient :

$n = \operatorname{tr}(I_n) = \operatorname{tr}(M^TM) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|$

Il a été vu en cours que $\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\ (A,B)\mapsto \operatorname{tr}(A^TB)\end{cases}$ est un produit scalaire.

Pour ce produit scalaire :

$\forall M\in O(n)\ \|M\|^2 = \operatorname{tr}(M^TM) = \operatorname{tr}(I_n) = n$

Soit J la matrice telle que $J_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geq 0$, -1 sinon.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :
$\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}| = (M, J) \leq \|M\| \, \|J\| = \sqrt{n} \times n$

Exercice 8 *(Centrale 2023)*

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Définition d'une matrice orthogonale.
2. Montrer que $\begin{cases} E^2 \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^T B\right) \end{cases}$ est un produit scalaire.
3. On donne `ortho(n)` qui donne une matrice aléatoire $A \in O(n)$ et `norm_matr(A)` qui sont importées d'un module de Centrale.
   Par exemple, je propose pour `ortho(n)`

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
import numpy.random as rd

def ortho(n):
    N=rd.randint(1,21)
    A=np.eye(n)
    if N%2==0:
        for i in range(n):
            A[i,i]=-1
    for a in range(n):
        B=np.eye(n)
        v=rd.random(n)
        for i in range(n):
            v[i]=2*v[i]-1
        s=sum(v[i]**2 for i in range(n))
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                B[i,j]-=2*v[i]*v[j]/s
        A=np.dot(A,B)
    return(A)
```

   `norm_matr(A)` calcule la norme de la matrice A pour la norme euclidienne associée au produit scalaire de la question 2.

```
def norm_matr(A):
    return np.sqrt(np.trace(np.dot(np.transpose(A),A)))
```

   On demande d'écrire `moy(A,p)` qui donne $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

   On demande d'afficher les 50 premiers termes de la suite de terme général $\displaystyle\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right\|$ avec $n = 5$ et $A \in O(n)$ aléatoire.
   Afficher le spectre de A et faire une conjecture sur la limite selon que 1 est ou non valeur propre de A.

4. On suppose que $A \in O(n)$ et $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left((I_n - A)\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$.
5. Soit $A \in O(n)$.
   Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(A - I_n) \bigoplus^{\perp} \mathrm{Im}\,(A - In)$.
6. On suppose que $A \in O(n)$ et $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)$.

Correction

1. C'est du cours.
2. Traité en cours.
3. ```
   def moy(A,p):
       taille=np.shape(A)
       n=taille[0]
       B=np.eye(n)
       S=np.zeros((n,n))
       for k in range(0,p):
           S=S+B
           B=np.dot(A,B)
       return 1/p*S

   print(alg.eigvals(A))
   ```
   Je trouve que l'affichage des 50 premières valeurs est peu concluant : la convergence est trop lente.
   Je préfère :
   ```
   for p in range(200,202):
       print(norm_matr(moy(A,p)))
   ```
   On conjecture que la suite $\left(\left\|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right)\right\|$ converge vers 0 lorsque 1 n'est pas valeur propre de A et converge vers 1 lorsque 1 est valeur propre de A.
4.
$$\begin{aligned}(I_n - A)\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k &= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left(A^k - A^{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{p}(I_n - A^p)\end{aligned}$$

   La norme d'une matrice orthogonale est égale à $\sqrt{n}$ donc :
   $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \left\|\frac{1}{p}(I_n - A^p)\right\| \leq \frac{2\sqrt{n}}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
   Donc $\frac{1}{p}(I_n - A^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
   ```

Donc $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k = (I_n - A)^{-1}\left(\dfrac{1}{p}(I_n - A^p)\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

D'où $\left\|\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

5. Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$ et $Y \in \operatorname{Im}(A - I_n)$:
   $AX = X$ et il existe $Z \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = AZ - Z$

$$\begin{aligned}(X \mid Y) &= (X \mid AZ - Z) = (X \mid AZ) - (X \mid Z)\\ &= (AX \mid AZ) - (X \mid Z)\\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{Ker}(A - I_n) \perp \operatorname{Im}(A - I_n)$.
   De plus $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_n) \perp \operatorname{Im}(A - I_n)) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n) + \dim(\operatorname{Im}(A - I_n) = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc :
   $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A - I_n) \bigoplus^{\perp} \operatorname{Im}(A - In)$.

6. Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers une BON adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker}(A - I_n) \bigoplus^{\perp} \operatorname{Im}(A - In)$, on a $A = P\begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}P^T$ où B est une matrice orthogonale dont 1 n'est pas valeur propre.
   On en déduit :
   $\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} P\begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^T$
   puis $\left\|\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} A^k\right\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{N}$ où N est la dimension du sous-espace propre associé à 1. A ce stade, on peut facilement montrer que c'est aussi la multiplicité de 1 comme valeur propre de A.