Révisions 2025
Intégrales à paramètres
20 juin 2025

941

Exercice 1 *(CCP 2023)*

On note sous réserve d'existence $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{1+x^2}$ où K est un nombre indépendant de x qu'on explicitera.
3. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
   En déduire $f(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   Montrer que le réel $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}u$ existe.
5. On suppose L continue en 0. Calculer $L(0)$.

Exercice 2 *(Mines-Telecom 2023)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\cos(xt)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $B_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\sin(xt)\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont définies.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont dérivables.

Exercice 3 *(Mines 2023, 2024)*

Soient $\alpha > 1$ et $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Exercice 4 *(Centrale 2023)*

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $G(x,n) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{x^2+(n\pi+u)^2}\,\mathrm{d}u$.

1. Montrer que F est bien définie.
   Tracer F entre 0 et 20 et conjecturer $\lim\limits_{+\infty} F$.
2. Démontrer la conjecture.
3. Montrer :
   $\forall x > 0 \; F(x) = x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n G(x,n)$
4. Soit x et $\epsilon > 0$.
   Trouver un entier N tel que $\left| F(x) - x \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n G(x,n) \right| \leq \epsilon$
5. Ecrire la fonction `N(x,epsilon)`
6. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x}$ et $x \mapsto xF(x)$ et conjecturer la dérivabilité de F en 0 et un équivalent en $+\infty$.
7. Démontrer les conjectures.