

Révisions 2025
Intégrales à paramètres
20 juin 2025

941

Exercice 1 (CCP 2023)

On note sous réserve d'existence $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \frac{K}{1+x^2}$ où K est un nombre indépendant de x qu'on explicitera.
3. (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
En déduire $f(x)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que le réel $L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-ux} du$ existe.
5. On suppose L continue en 0. Calculer $L(0)$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $g_x : t \mapsto \cos(xt) e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |g_x(t)| \leq e^{-t}$
 $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction $h_x : t \mapsto e^{(-1+ix)t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |h_x(t)| = e^{-t}$
Donc h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt &= \Re e \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt \right) \\ &= \Re e \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

3. (a) On fixe $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} \end{cases} .$$

- f_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $f_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x : f_x$ est prolongeable par continuité en 0.
- $f_x(t) = o_{+\infty}(e^{-t})$

Donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

(b) Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} \end{cases}$.

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et :
 $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cos(tx) e^{-t}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Hypothèse de domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$$

avec $t \mapsto e^{-t}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t} dt = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(0) = 0 \text{ donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \arctan(x)$$

4. On fixe $x \in \mathbb{R}_+$.

La fonction $g_x : u \mapsto \frac{\sin(u)}{u} e^{-ux}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g_x(0) = 1$.

Si $x > 0$, $g_x(u) = o(e^{-xu})$ avec $u \mapsto e^{-xu}$ intégrable en $+\infty$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction g_0 a été traitée en détail en cours : $\int_0^{+\infty} g_x(u) du$ est semi-convergente.

5.

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad L(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-ux} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/x)}{t} e^{-t} dt \text{ changement de variable } \mathcal{C}^2 \nearrow \nearrow u = \frac{t}{x} \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit } L(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 (Mines-Telecom 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-nt} \cos(xt) dt \end{cases}$ et $B_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-nt} \sin(xt) dt \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont définies.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont dérivables.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $C_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-nt} e^{i(xt)} dt \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto e^{-nt} e^{i(xt)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |e^{-nt} e^{i(xt)}| = e^{-nt}$$

$n > 0$ donc la fonction $t \mapsto e^{-nt} e^{i(xt)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on en déduit que $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont définis.

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad C_n(x) &= \int_0^{+\infty} e^{(ix-n)t} dt = \left[\frac{e^{(ix-n)t}}{ix-n} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{n-ix} = \frac{n+ix}{n^2+x^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2} \text{ et } B(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$$

Et on conclut facilement.

Exercice 3 (*Mines 2023, 2024*)

Soient $\alpha > 1$ et $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^\alpha} \end{cases}$.

- f_x est continue sur $[1; +\infty[$.
- $f_x(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}}$ avec $2\alpha > 2$ donc $2\alpha > 1$

On en déduit que f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

2. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{1}{(t^2+x^2)^\alpha} \end{cases}$.

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [1; +\infty[\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot) = f_x$ est continue et intégrable sur $[1; +\infty[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur $[1; +\infty[$.

• **Hypothèse de domination**

Soit $a > 0$.

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times [1; +\infty[\quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2\alpha a}{t^{2\alpha+2}}$$

avec $t \mapsto \frac{2\alpha a}{t^{2\alpha+2}}$ continue, positive et intégrable sur $[1; +\infty[$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x > 0$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $t = xu$:

$$f(x) = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{x \, du}{(x^2(1+u^2))^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^\alpha}$$

La fonction $h : u \mapsto \frac{1}{(1+u^2)^\alpha}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{1/x}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^\alpha} > 0$$

Donc $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^\alpha}$ avec $2\alpha - 1 > 1$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f étant paire, on en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Centrale 2023)

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt$ et pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$G(x, n) = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du.$$

1. Montrer que F est bien définie.

Tracer F entre 0 et 20 et conjecturer $\lim_{+\infty} F$.

2. Démontrer la conjecture.

3. Montrer :

$$\forall x > 0 \quad F(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n G(x, n)$$

4. Soit x et $\epsilon > 0$.

Trouver un entier N tel que $\left| F(x) - x \sum_{n=0}^N (-1)^n G(x, n) \right| \leq \epsilon$

5. Ecrire la fonction $N(x, \epsilon)$

6. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ et $x \mapsto xF(x)$ et conjecturer la dérivabilité de F en 0 et un équivalent en $+\infty$.

7. Démontrer les conjectures.

Correction

1. Soit $x > 0$.

La fonction $f_x : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f_x(t) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

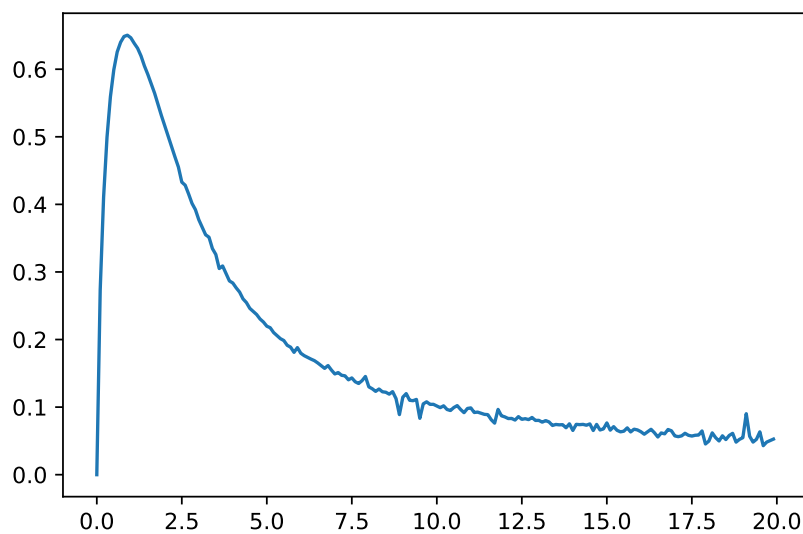
```

import numpy as np
import scipy.integrate as integr
import matplotlib.pyplot as plt

def F(x):
    def fx(t):
        return np.sin(x*t)/(1+t**2)
    return integr.quad(fx,0,np.inf)[0]

les_x=[0.1*i for i in range(200)]
les_y=[F(x) for x in les_x]
plt.plot(les_x,les_y)

```



On conjecture $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

2. On fait une intégration par parties :

$$u'(t) = \sin(xt), \quad u(t) = -\frac{\cos(xt)}{x}$$

$$v(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad v'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$$

On en déduit :

$$\forall x > 0 \quad |F(x)| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

3. Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^p (-1)^n G(x, n) &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du \\
 &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t - n\pi)}{x^2 + t^2} dt \\
 &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(-1)^n \sin(t)}{x^2 + t^2} dt \\
 &= \sum_{n=0}^p \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt \\
 &= \int_0^{(p+1)\pi} \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du = \int_0^{(p+1)\pi/x} \frac{\sin(xt)}{x^2 + x^2 t^2} x dt \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^{(p+1)\pi/x} \frac{\sin(xt)}{1 + t^2} dt
 \end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à faire tendre p vers $+\infty$.

$$4. \left| F(x) - x \sum_{n=0}^N (-1)^n G(x, n) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du \right|$$

- La série de terme général $(-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du$ est alternée.
- Son terme général converge vers 0 (on a montré dans la question 3 que la série converge).
- La suite $\left(\left| (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du \right| \right) = \left(\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2} du \right)$ est décroissante

En effet :

$$\forall u \in [0; \pi] \quad 0 \leq n\pi + u \leq (n+1)\pi + u$$

Donc :

$$\forall u \in [0; \pi] \quad (n\pi + u)^2 \leq ((n+1)\pi + u)^2$$

Donc :

$$\forall u \in [0; \pi] \quad 0 < x^2 + (n\pi + u)^2 \leq x^2 + ((n+1)\pi + u)^2$$

Donc :

$$\forall u \in [0; \pi] \quad \frac{1}{x^2 + ((n+1)\pi + u)^2} \leq \frac{1}{x^2 + (n\pi + u)^2}$$

et il n'y a plus qu'à multiplier par $\sin(u) \geq 0$ et à intégrer entre 0 et π .

On en déduit :

$$\left| F(x) - x \sum_{n=0}^N (-1)^n G(x, n) \right| \leq x G(x, N+1) = \int_0^\pi \frac{x \sin(u)}{x^2 + ((N+1)\pi + u)^2} du \leq \frac{x}{\pi(N+1)^2}$$

Il suffit alors de prendre N plus grand que $\sqrt{\frac{x}{\pi\epsilon}}$.

5. `def N(x, epsilon):`

`return int(np.sqrt(x/(np.pi*epsilon)))+1`

6. Il s'agit a priori d'utiliser $N(x, \epsilon)$ pour faire des tracés plus précis qu'avec la méthode de la question 1.

`def G(n, x):`

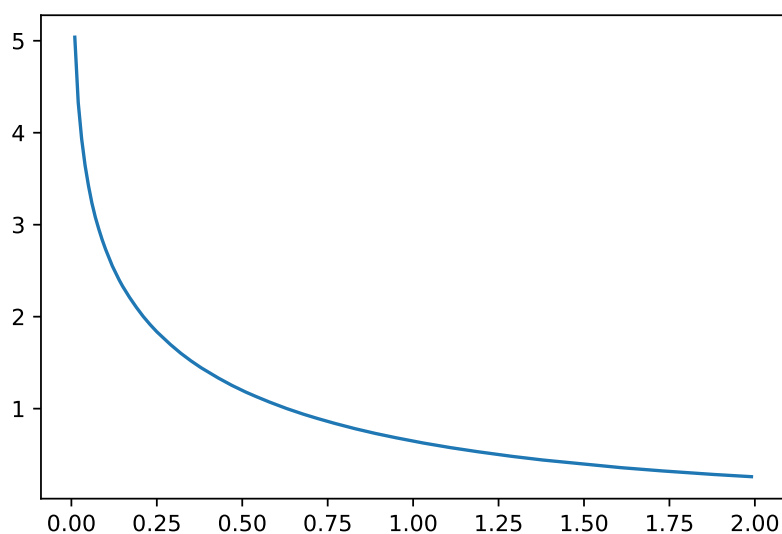
`def f(u):`

```

        return np.sin(u)/(x**2+(n*np.pi+u)**2)
    return integr.quad(f,0,np.pi)[0]
def FF(x):
    epsilon=0.001
    M=N(x,epsilon)
    S=0
    for n in range(M+1):
        S+=(-1)**n*G(n,x)
    return(x*S)

les_x=[0.01*i for i in range(1,200)]
les_y=[FF(x)/x for x in les_x]
plt.plot(les_x,les_y)

```

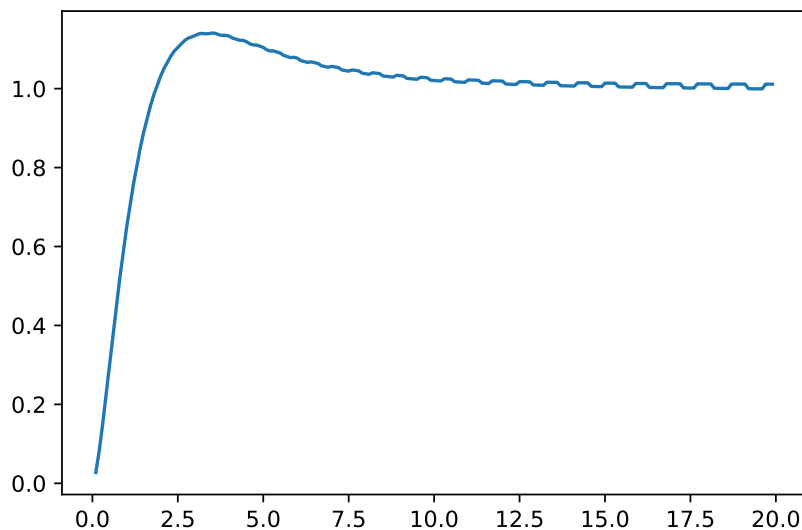


On conjecture $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$, ce qui entraîne que F n'est pas dérivable en 0.

```

les_x=[0.1*i for i in range(1,200)]
les_y=[FF(x)*x for x in les_x]
plt.plot(les_x,les_y)

```



On conjecture $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ ie $F(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

7. D'après la question 4 :

$$\forall x > 0 \quad \left| \frac{F(x)}{x} - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du \right| \leq \frac{1}{\pi}$$

Il suffit donc de prouver $\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du &\geq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{u}{x^2 + u^2} du \text{ par concavité de } \sin \\ &\geq \frac{1}{\pi} \left[\ln(x^2 + u^2) \right]_0^{\pi/2} \\ &\geq \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(x^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) - 2 \ln(x) \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \end{aligned}$$

On a déjà montré :

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{2t \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$$

Il s'agit donc de montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{2t \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

On fait une intégration par parties :

$$u(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}, \quad u'(t) = 2 \frac{(1+t^2)^2 - 4t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = 2 \frac{(1+t^2)(1-3t^2)}{(1+t^2)^4} = 2 \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}$$

$$v'(t) = \cos(xt), \quad v(t) = \frac{\sin(xt)}{x}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc l'IPP est justifiée.

De plus $v(0) = 0$ donc :

$$\begin{aligned}\forall x > 0 \left| \int_0^{+\infty} \frac{2t \cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \right| &= \frac{2}{x} \left| \int_0^{+\infty} \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3} \sin(xt) dt \right| \\ &\leq \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1+3t^2}{(1+t^2)^3} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$