# Révisions 2025
# Compléments
# 19 juin 2025

941

**Exercice 1** *(Mines 2024)*

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$, $B \in E$.
Donner $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\|^2$ soit minimale.

**Exercice 2** *(Mines-Telecom MP 2024)*

On dispose de $N$ coffres.
La probabilité que le trésor se trouve dans ces coffres est $p$.
Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor.
Sachant que le trésor n'était pas dans les $N-1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

**Exercice 3** *(Mines 2024)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner $\prod_{k=1}^{n} X_k(\Omega) = X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et la loi du $n$-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Donner $T_n(f) = E\left(f(S_n)\right)$ sous forme de somme.
3. En déduire la relation de récurrence : $T_n(f) = T_{n-1}(g)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$.
4. Montrer que la suite $\left(E(|S_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Comparer $\left(E(|S_n|)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Donner la loi de $S_n$.
7. Une question pour montrer qu'à l'infini $S_n$ est presque nulle presque sûrement. (Cette question est supprimée).

**Exercice 4** *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$
1) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ tel que $C^2 = A^{-1}$

2) On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

3) Déduire que

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

**Exercice 5** *(Mines 2024)*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et $n \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \quad \int_0^1 f(x) x^k \mathrm{d}x = 0$$

Montrer que $f$ admet au moins $n+1$ zéros dans $[0,1]$.
*Indication donnée : Raisonner par l'absurde et poser une fonction $g(x)$ en fonction des $x^k$ pour appliquer le théorème de positivité de l'intégrale à $f(x)g(x)$.*