Révisions 2025
Compléments
19 juin 2025

941

Exercice 1 *(Mines 2024)*

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p, $B \in E$.
Donner $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\|^2$ soit minimale.

Correction

- **Algèbre linéaire**
  A peut être vue comme une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$.
  A est de rang p donc A est injective.
  Soit Y le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}\,(A)$. C'est l'élément de $\mathrm{Im}\,(A)$ le plus proche de B.
  A étant injective, Y a un antécédent et un seul : c'est le vecteur X_0 cherché.
  X_0 est caractérisé par :
  $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ (AX)^T(AX_0 - B) = 0$
  Donc :
  $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ X^T\left(A^TAX_0 - A^TB\right) = 0$
  avec $A^TAX_0 - A^TB \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
  On en déduit $A^TAX_0 - A^TB = 0$.
  Si $X \in \mathrm{Ker}\,(A^TA)$ alors $X^TA^TAX = X^T0 = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ et $AX = 0$
  Mais A est injective donc $X = 0$ et A^TA est injective.
  Mais A^TA est une matrice carrée (à p lignes et p colonnes) donc A^TA est inversible.
  D'où $X_0 = \left(A^TA\right)^{-1}A^TB$.
- **Analyse**
  Soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
& \forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ \ \|A(X_0+H) - B\|^2 \\
= \ & (AX_0 - B + AH)^T(AX_0 - B + AH) \\
= \ & \|AX_0 - B\|^2 + H^TA^T(AX_0 - B) + (AX_0 - B)^TAH + H^TA^TAH \\
= \ & \|AX_0 - B\|^2 + L(H) + o(H)
\end{aligned}$$

  avec $L(H) = H^TA^T(AX_0 - B) + (AX_0 - B)^TAH = 2(AX_0 - B)^TAH$ (une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est symétrique)
  L est linéaire donc c'est la différentielle de la fonction $f : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto \|AX - B\|^2$.
  On en déduit $\nabla f(X_0) = 2A^T(AX_0 - B) = 2(A^TAX_0 - A^TB)$.
  Si $X \in \mathrm{Ker}\,(A^TA)$ alors $X^TA^TAX = X^T0 = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ et $AX = 0$

Mais A est injective donc $X = 0$ et $A^T A$ est injective.
Mais $A^T A$ est une matrice carrée (à p lignes et p colonnes) donc $A^T A$ est inversible.
Le gradient de f s'annule donc une fois et une seule en $X_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B$.

$$\begin{array}{rl} & \forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ \|A(X_0 + H) - B\|^2 \\ = & (AX_0 - B + AH)^T (AX_0 - B + AH) \\ = & \|AX_0 - B\|^2 + H^T A^T (AX_0 - B) + (AX_0 - B)^T AH + H^T A^T AH \\ = & \|AX_0 - B\|^2 + (\nabla f(X_0) \mid H) + H^T A^T AH \\ = & \|AX_0 - B\|^2 + \|AH\|^2 \end{array}$$

La fonction est bien minimale en X_0.

Exercice 2 *(Mines-Telecom MP 2024)*

On dispose de N coffres.
La probabilité que le trésor se trouve dans ces coffres est p.
Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor.
Sachant que le trésor n'était pas dans les $N - 1$ premiers coffres, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

Correction
On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-ème$ coffre contient le trésor et 0 sinon.
Les X_i ne sont pas indépendantes : $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = 0$ (si il n'y a qu'un seul trésor) et $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) > 0$.
L'évènement "le trésor est dans l'un des coffres" s'écrit $\bigcup_{i=1}^{N} (X_i = 1)$ et il y a incompatibilité.
Donc $p = \sum_{i=1}^{N} P(X_i = 1)$
Les coffres ont chacun la même probabilité de contenir le trésor donc $p = NP(X_1 = 1)$: chaque coffre a une probabilité $\frac{p}{N}$ de contenir le coffre.

On cherche $P\left(X_N = 1 \mid \bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(X_N = 1 \mid \bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right) &= \frac{P\left(X_N = 1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right)\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{N-1} X_i = 0\right)} \\ &= \frac{P(X_N = 1)}{P\left((X_N = 1) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{N} X_i = 0\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{p}{N}}{P(X_N = 1) + P\left(\bigcap_{i=1}^{N} X_i = 0\right)} \\ &= \frac{\frac{p}{N}}{\frac{p}{N} + 1 - p} = \frac{p}{p + N(1-p)} \end{aligned}$$

Si N est grand, cela fait environ $\dfrac{p}{N(1-p)}$ et cela tend vers 0 quand N tend vers l'infini : si on n'a pas trouvé le trésor après avoir vidé tous les coffres sauf 1, c'est sans doute parce que le coffre n'y est pas.
Si $p = 1$, on trouve 1 : c'est normal le trésor est dans un coffre et on les a tous regardé sauf le dernier donc il est dans le dernier.
Si $p = 0$, on trouve 0 : si le trésor n'est pas dans les coffres, avoir ouvert $N - 1$ coffres n'apporte aucune information.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Donner $\prod_{k=1}^{n} X_k(\Omega) = X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et la loi du n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Donner $T_n(f) = E\left(f(S_n)\right)$ sous forme de somme.
3. En déduire la relation de récurrence : $T_n(f) = T_{n-1}(g)$ avec $g : x \mapsto \dfrac{f(x+1) + f(x-1)}{2}$.
4. Montrer que la suite $(E(|S_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
5. Comparer $(E(|S_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. Donner la loi de S_n.
7. Une question pour montrer qu'à l'infini S_n est presque nulle presque sûrement. (Cette question est supprimée).

Correction

1. $(X_1,\dots,X_n)(\Omega) = \prod_{k=1}^{n} X_k(\Omega) = \{-1;1\}^n$
   Par indépendance, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \{-1;1\}^n$:
$$\begin{aligned} P((X_1,\dots,X_n)=(x_1,\dots,x_n)) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k=x_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Card}\left(\{-1;1\}^n\right)} \end{aligned}$$
   Donc $(X_1,\dots,X_n)$ suit la loi uniforme sur $\{-1;1\}^n$.
2. Par le théorème de transfert :
   $T_n(f) = \frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{-1;1\}^n} f(x_1+\dots+x_n)$
3.
$$\begin{aligned} & T_n(f) \\ = & \frac{1}{2^n}\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{-1;1\}^n} f(x_1+\dots+x_n) \\ = & \frac{1}{2^n}\sum_{x_n\in\{-1;1\}}\left(\sum_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\{-1;1\}^{n-1}} f(x_1+\dots+x_n)\right) \\ = & \frac{1}{2^n}\left(\sum_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\{-1;1\}^{n-1}} f(x_1+\dots+x_{n+1}+1) + \sum_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\{-1;1\}^{n-1}} f(x_1+\dots+x_{n-1}-1)\right) \\ = & \frac{1}{2^n}2^{n-1}T_{n-1}(2g) = \frac{1}{2}T_{n-1}(2g) \\ = & T_{n-1}(g) \text{ car } T_{n-1} \text{ est linéaire} \end{aligned}$$
4. Ici $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto \frac{|x-1|+|x+1|}{2}$.
   $E(|S_n|) - E(|S_{n-1}|) = T_{n-1}(g) - T_{n-1}(f) = T_{n-1}(g-f)$.
   Si $x \geq 1$, $g(x) - f(x) = \frac{x+1+x-1}{2} - x = 0$
   Si $x \in [0;1]$, $g(x) - f(x) = \frac{1-x+x+1}{2} - x = 1 - x \geq 0$
   Enfin g et f sont paires.
   Donc $g - f \geq 0$.
   En revenant à la définition de T_k, on en déduit que $E(|S_n|) - E(|S_{n-1}|) \geq 0$.
   En fait on peut être plus précis :
   Si n est pair alors $E\left(|S_n|\right) = E\left(|S_{n-1}|\right)$
   Si $n = 2p+1$ est impair alors $E\left(|S_n|\right) = E\left(|S_{n-1}|\right) + \frac{\binom{2p}{p}}{2^p}$
5. Par Cauchy-Schwarz :
   $E\left(|S_n|\right) = E\left(|S_n| \times 1\right) \leq \sqrt{E\left(|S_n|^2\right)}\sqrt{E(1^2)} = \sqrt{E\left(S_n^2\right)}$

Mais $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1$ et par indépendance :
$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n$
Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$
On en déduit $E(S_n^2) = n$ puis : $E(|S_n|) \leq \sqrt{n}$.
Faut-il une minoration en utilisant les remarques de la fin de la question précédente ?

6. $S_n(\Omega) = \{n - 2k, k \in [\![0; n]\!]\}$
   $\forall k \in [\![1; n]\!]\ P(S_n = n - 2k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$
   $\forall l \in S_n(\Omega)\ P(S_n = l) = \dfrac{\binom{n}{\frac{n-l}{2}}}{2^n}$

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$
1) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ tel que $C^2 = A^{-1}$
2) On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

3) Déduire que
$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

Correction

1. A est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ telle que $P^T AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
   A étant symétrique définie positive, les λ_i sont strictement positifs.
   La matrice $C = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^T$ convient.
2. $(CBC)^T = C^T B^T C^T = CBC$ donc D est symétrique réelle.
   $\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T DX = (CX)^T B(CX) \geq 0$ car B est symétrique positive.
   Il existe donc $Q \in O(n)$ telle que $D = Q\Delta Q^T$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ les μ_i étant positifs ou nuls.
   $I_n + D = \mathrm{Diag}(\mu_1 + 1, \ldots, \mu_n + 1)$ et $\det(D) = \mu_1 \ldots \mu_n$ donc il s'agit de prouver :
   $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n\ \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)\right)^{1/n} \geq 1 + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$
   Si l'un des x_i est nul alors l'inégalité est triviale.
   Si les x_i sont tous strictement positifs alors on peut écrire $x_i = \mathrm{e}^{y_i}$ et il s'agit de prouver :
   $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \mathrm{e}^{y_i}) \geq \ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)$
   ie $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geq f\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ avec $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$
   Il suffit donc de prouver que f est convexe.
   Or f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \geq 0$

Donc f est convexe.

3.

$$\begin{aligned}
(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} &= \det\left(C^{-2}+B\right)^{\frac{1}{n}} = \det\left(C^{-1}\left(I_n+CBC\right)C^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\det\left(C^{-1}\right)\det\left(I_n+D\right)\det\left(C^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}\right)\right)^{\dfrac{1}{n}}\left(\det\left(I_n+D\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\left(\det\left(D\right)\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\geq \left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(A\right)\det\left(C\right)\det\left(B\right)\det\left(C\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(A\right)\det\left(C\right)\det\left(C\right)\det\left(B\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(AC^2B\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq \left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(B\right)\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et $n \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \int_0^1 f(x)x^k \mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros dans $[0,1]$.
<u>Indication donnée</u> : Raisonner par l'absurde et poser une fonction $g(x)$ en fonction des x^k pour appliquer le théorème de positivité de l'intégrale à $f(x)g(x)$.

Correction
On suppose que f a un nombre de racines inférieur ou égal à n.
f n'est donc pas la fonction nulle.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ avec f continue non nulle donc f ne peut pas être de signe constant.
On en déduit que f s'annule au moins une fois sur $]0;1[$ (théorème des valeurs intermédiaires).
Si f ne s'annule qu'une fois en $x_0 \in]0;1[$, elle est de signe constant sur $[0,x_0]$ et sur $[x_0;1]$, les signes sur ces intervalles étant opposés.
La fonction $x \mapsto (x-x_0)f(x)$ est continue, non nulle et de signe constant donc
$\displaystyle\int_0^1 (x-x_0)f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.
Mais $\displaystyle\int_0^1 (x-x_0)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x - x_0\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
C'est absurde donc f s'annule au moins deux fois sur $]0;1[$.
f s'annule donc en $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ avec $2 \leq p \leq n$.
On note $x_0 = 0$ et $x_{p+1} = 1$ et on a $x_0 < \cdots < x_{p+1}$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $]x_k;x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq p$.

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ f(x_k^-)f(x_k^+)<0}}^{p} (x - x_p)$

La fonction fg est continue sur $[0;1]$ de signe constant et différente de la fonction nulle donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$

Mais g est une fonction polynomiale de degré $p \leq n$ donc par linéarité de l'intégrale à partir des hypothèses de l'énoncé, $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$

On aboutit à une contradiction donc f s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0;1]$.