

Révisions 2025
Compléments
20 juin 2025

941

Exercice 1 (*Centrale 2024*)

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.
La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général v_n converge.
Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général v_n diverge.
Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
Commenter.

Exercice 2 (*Centrale 2024*)

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; 2\pi[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n z^k$

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |S_n| \leq M$
2. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{z^n}{n^s}$ avec $s \in]0; 1]$.
3. Montrer que $\int_0^1 \frac{dr}{1-rz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$

Exercice 3 (*Mines 2024*)

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des points intérieurs à $S_n(\mathbb{R})$.
3. $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tq :
 $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T M X \geq \alpha X^T X$
5. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est-il un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$?
6. Quels sont les points intérieurs à $S_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 4 (*Mines 2024*)

Soit $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Montrer :

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0 \quad P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} + \epsilon_k \right) - l \right| \geq \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 5

Montrer :

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \text{ tq } x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad \sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}$$