# Révisions 2025
# Compléments
# 20 juin 2025

941

**Exercice 1** *(Centrale 2024)*

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
   Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet la même limite.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
   Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général $v_n$ converge.
   Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général $v_n$ diverge.
   Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
   Commenter.

**Correction**

1. On commence par le cas $l = 0$.
   Soit $\epsilon > 0$.
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ \ |u_n| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0 + 1\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} \epsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |u_k|\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$\exists n_1 \geq n_0 + 1$ tq $\forall n \geq n_1\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \leq \epsilon$

Donc :

$\forall n \geq n_1\ \ \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leq 2\epsilon$

Donc $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On suppose ensuite $l \in \mathbb{R}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $w_n = u_n - l$.
$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Mais :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - l$
donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
On suppose ensuite $l = +\infty$.
Soit $A > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ u_n \geq A$
$\forall n \geq n_0 + 1\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{n-n_0}{n}A$
$\forall n \geq 2n_0\ 2(n-n_0) - n = n - 2n_0 \geq 0$
Donc :
$\forall n \geq 2n_0\ \frac{n-n_0}{n} \geq \frac{1}{2}$
On en déduit :
$\forall n \geq 2n_0\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{2}A$
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_1 \geq 2n_0$ tq $\forall n \geq n_1\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right| \leq \frac{A}{4}$
On a alors :
$\forall n \geq n_1\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \frac{A}{4}$
Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Enfin le cas $l = -\infty$ se traite avec $w_n = -u_n$.

2. On commence par le cas $l \in \mathbb{R}_+^*$.
$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$.
D'après la première question :
$\frac{\ln(v_n) - \ln(v_1)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$
$\frac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(v_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l)$.
En passant à l'exponentielle, $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

On suppose ensuite $l = 0$.
$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
D'après la première question :
$\frac{\ln(v_n) - \ln(v_1)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

$\frac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{\ln(v_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
En passant à l'exponentielle, $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Le cas $l = +\infty$ se traite de manière similaire.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ v_{2p-1} = 1$ et $v_{2p} = 2$
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ v_{2p-1}^{1/(2p-1)} = 1 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ v_{2p}^{1/(2p)} = \exp\left(\frac{\ln(2p)}{2p}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
Donc $v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Par contre $\frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = 2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 2$
Par contre $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2}$
Donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

3. Il s'agit donc ici d'établir une règle d'application plus générale que la règle de d'Alembert.
On commence par le cas $l < 1$.
Soit $r \in ]l; 1[$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ v_n^{1/n} \leq r$
$\forall n \geq n_0\ 0 \leq v_n \leq r^n$
La série de terme général $r^n$ converge donc la série de terme général $v_n$ converge.

On passe ensuite au cas $l > 1$.
Soit $r \in ]1; l[$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ v_n^{1/n} \geq r$
$\forall n \geq n_0\ 0 \leq v_n \leq r^n$
Donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série de terme général $v_n$ diverge grossièrement.

Prenons $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$v_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série de terme général $v_n$ diverge.
Prenons $v_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$v_n^{1/n} = \exp\left(\frac{-2\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série de terme général $v_n$ converge.

**Exercice 2** *(Centrale 2024)*

Soit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in ]0; 2\pi[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ |S_n| \leq M$

2. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{z^n}{n^s}$ avec $s \in ]0; 1]$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1-rz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$

**Correction**

1. $z \neq 1$ donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ |S_n| = \left| z\dfrac{z^n-1}{z-1} \right| \leq \dfrac{2}{|z-1|}$
2. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^s} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k^s} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k^s} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k^s} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^s} \\ &= \frac{S_n}{n^s} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left( \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) \end{aligned}$$
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \left| \dfrac{S_n}{n^s} \right| \leq \dfrac{M}{n^s} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $s > 0$
   Donc $\dfrac{S_n}{n^s} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
   La suite $\left( \dfrac{1}{k^s} \right)$ converge (vers 0) car $s > 0$ donc la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right)$ converge.
   $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \left| S_k \left( \dfrac{1}{k^s} - \dfrac{1}{(k+1)^s} \right) \right| = |S_k| \left( \dfrac{1}{k^s} - \dfrac{1}{(k+1)^s} \right) \leq M \left( \dfrac{1}{k^s} - \dfrac{1}{(k+1)^s} \right)$
   donc la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} S_k \left( \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right)$ converge.
   Si on note $A$ sa somme :
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k^s} \xrightarrow[n \to +\infty]{} A \in C$ donc la série de terme général $\dfrac{z^n}{n^s}$ converge.
3. $\forall r \in [0; 1[ \ |rz| = r < 1$ donc $1 - rz \neq 0$
   Pour $r = 1$, $1 - rz = 1 - z \neq 1$.
   La fonction $r \mapsto \dfrac{1}{1-rz}$ est donc continue sur $[0; 1]$ : l'intégrale ne pose pas de problème de définition.
   D'après la question précédente, la série de droite est bien convergente.
   $\forall r \in [0; 1[ \ \dfrac{1}{1-rz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n z^n$ car $|rz| = r < 1$
   Dans la mesure où il n'y pas convergence simple sur le segment, on ne peut pas utiliser le premier théorème d'intégration terme à terme.
   Le théorème $N_1$ ne s'applique pas non plus :
   $\displaystyle\int_0^1 |r^n z^n| \, \mathrm{d}r = \frac{|z|^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série divergente.
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k z^k = \frac{1 - r^{n+1} z^{n+1}}{1 - rz}$ car $rz \neq 1$
   On intègre entre 0 et 1 :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1-rz} - \int_0^1 \frac{r^{n+1} z^{n+1}}{1-rz} \mathrm{d}r$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{r^{n+1}z^{n+1}}{1-rz} \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[0;1[$.
- La suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$.
- La fonction nulle est continue sur $[0;1[$.
- **Domination**
  La fonction $r \mapsto |1-rz|$ est continue sur $[0;1]$ donc :
  $\exists r_0 \in [0,1]$ tq $\forall r \in [0;1]\ \ |1-rz| \geq |1-r_0z| > 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall r \in [0;1[\ |f_n(r)| = \dfrac{r^{n+1}}{|1-rz|} \leq \phi(r) = \dfrac{1}{|1-r_0z|}$
  avec $\phi$ continue, positive et intégrable sur $[0;1[$.

D'après le théorème de convergence dominée :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{r^{n+1}z^{n+1}}{1-rz}\mathrm{d}r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
D'où :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1-rz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$

**Exercice 3** *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des points intérieurs à $S_n(\mathbb{R})$.
3. $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?
4. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tq :
   $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^TMX \geq \alpha X^TX$
5. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est-il un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$ ?
6. Quels sont les points intérieurs à $S_n^+(\mathbb{R})$ ?

**Correction**

1. Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\forall p \in \mathbb{N}\ S_p^T = S_p$
   On fait tendre $p$ vers $+\infty$ : $S^T = S$ (la transposition est continue comme toute application linéaire en dimension finie).
   Donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   Par caractérisation séquentielle des fermés, $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M$ un point intérieur à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   En particulier, $M \in S_n(\mathbb{R})$.
   On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \ \|A\| = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}(|a_{i,j}|)$
   Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(M, r) \subset S_n(\mathbb{R})$.
   En particulier, $M + \dfrac{r}{2}E_{1,2} \in S_n(\mathbb{R})$.
   On en déduit que $E_{1,2} \in S_n(\mathbb{R})$. C'est absurde donc $S_n(\mathbb{R})$ n'a pas de point intérieur.

3. Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\forall p \in \mathbb{N}\ S_p^T = S_p$
On fait tendre $p$ vers $+\infty$ : $S^T = S$.
$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T S_p X \geq 0$
On fixe $X$ et on fait tendre $p$ vers $+\infty$ :
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T S X \geq 0$
Donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Par caractérisation séquentielle des fermés, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. $M$ est symétrique réelle définie positive donc :
$\exists P \in O(n)$ tq $M = PDP^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et : $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \lambda_i > 0$
Soit $\alpha = \min\limits_{i\in[\![1;n]\!]}(\lambda_i) > 0$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} X^T M X &= X^T(PDP^T)X = (X^T P)D(P^T X) \\ &= (P^T X)^T D (P^T X) \end{aligned}$$
On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} X^T M X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \geq \alpha) y_i^2 \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = Y^T Y = X^T P P^T X \\ &\geq X^T X \text{ car } P \in O(n) \end{aligned}$$
5. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par :
$\forall A \in S_n(\mathbb{R})\ \|A\| = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}(|a_{i,j}|)$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} \left|X^T A X\right| &= \left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} x_i x_j\right| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|\,|x_i|\,|x_j| \\ &\leq \|A\| \sum_{1\leq i,j\leq n} |x_i|\,|x_j| = \|A\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \\ &\leq \|A\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq n\,\|A\|\, X^T X \end{aligned}$$

Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
$\exists \alpha > 0$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^T M X \geq \alpha X^T X$
Soit $A$ une matrice appartenant à la boule ouverte de $S_n(\mathbb{R})$ de centre $M$ et de rayon $\dfrac{\alpha}{n}$ pour la norme ci-dessus.
Comme on se restreint à $S_n(\mathbb{R})$, $A$ est symétrique.

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \ X^T A X &= X^T M X + X^T (A - M) X \\ &\geq \alpha X^T X - n \|A - M\| X^T X \\ &> \alpha X^T X - \alpha X^T X = 0 \end{aligned}$$

Donc $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Donc la boule ouverte de $S_n(\mathbb{R})$ de centre $M$ et de rayon $\dfrac{\alpha}{n}$ est incluse dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Donc $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

6. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il n'y en a pas car on peut trouver aussi près qu'on veut d'une matrice symétrique une matrice qui ne l'est pas.
On se restreint donc comme dans la question précédente à $S_n(\mathbb{R})$.
Les élèments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont points intérieurs à $S_n^{+}(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.
Soit $M \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_n^{++}(\mathbb{R})$.
0 est valeur propre de $M$ et il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $MX_0 = 0$.
Soit $\epsilon > 0$.
La matrice $M - \epsilon I_n$ est symétrique et :
$X_0^T (M - \epsilon I_n) X_0 = X_0^T M X_0 - \epsilon X_0^T X_0 = -\epsilon X_0^T X_0 < 0$
Donc $M - \epsilon I_n \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$
Comme on peut prendre $\epsilon$ arbitrairement petit, $M$ n'est pas un point intérieur à $S_n^{+}(\mathbb{R})$

**Exercice 4** *(Mines 2024)*

Soit $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![-1; 1]\!]$.
Montrer :
$\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\forall \epsilon > 0$ $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{k}{n} + \epsilon_k\right) - l\right| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

**Correction**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1; n]\!]$, soit $Y_{n,k} = \cos\left(\dfrac{k}{n} + \epsilon_k\right)$.
A $n$ fixé, les variables aléatoires $Y_{n,k}$ sont indépendantes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall k \in [\![1; n]\!]$ $E\left(Y_{k,n}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\cos\left(-1 + \dfrac{k}{n}\right) + \cos\left(\dfrac{k}{n}\right) + \cos\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\right)$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $E(X_n) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(-1 + \dfrac{k}{n}\right) + \cos\left(\dfrac{k}{n}\right) + \cos\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\right)$
est à un facteur près une somme de Riemann donc :
$E(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \left(\cos(1 + x) + \cos x + \cos(x - 1)\right) \mathrm{d}x$

$$L = \frac{1}{3}\int_0^1 (2\cos(1) + 1)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(1)(2\cos(1) + 1)}{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in [\![1;n]\!] \ V(Y_{n,k}) = E\left(Y_{n,k}^2\right) - E\left(Y_{n,k}\right)^2 \leq E\left(Y_{n,k}^2\right) \leq E(1) = 1$
Par indépendance :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ V(X_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(Y_{n,k}) \leq \dfrac{1}{n}$

Soit $\epsilon > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\epsilon^3}{4}$ et $|E(X_n) - L| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$
Soit $n \geq n_0$.
Supposons l'évènement $|X_n - L| \geq \epsilon$ réalisé.
$\epsilon \leq |X_n - E(X_n)| + |E(X_n) - L| \leq |X_n - E(X_n)| + \dfrac{\epsilon}{2}$
Donc l'évènement $|X_n - E(X_n)| \geq \dfrac{\epsilon}{2}$ est réalisé. Donc par Bienaymé-Tchebychev :

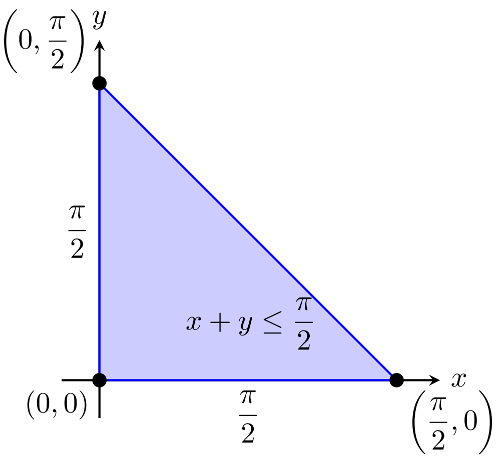
$$\begin{aligned} P\left(|X_n - L| \geq \epsilon\right) &\leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{4V(X_n)}{\epsilon^2} \leq \frac{4}{n\epsilon^2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

**Exercice 5**

Montrer :
$\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tq $x + y + z = \dfrac{\pi}{2} \quad \sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \dfrac{1}{8}$

**Correction**

- **Une solution proche du cours**
  Il s'agit de montrer :
  $\forall (x,y) \in \Delta \ f(x,y) \leq \dfrac{1}{8}$
  Avec $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ et
  $f \begin{cases} \Delta \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x - y\right) = \sin(x)\sin(y)\cos(x+y) \end{cases}$



$\Delta$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et $f$ est continue donc l'existence du maximum est assurée.
Examinons la fonction $f$ sur les trois côtés du triangle :

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \ f(x,0) & = & 0 \\
\forall y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \ f(0,y) & = & 0 \\
\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \ f\left(x, \frac{\pi}{2} - x\right) & = & 0
\end{array}$$

La fonction $f$ prenant des valeurs strictement positives sur $\Delta$, le maximum est atteint en un point intérieur. C'est donc aussi un maximum local et par suite un point critique.
Recherchons les points critiques de $f$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y)\left(\cos(x) - \sin(x+y)\right) = 0 \\ \sin(x)\left(\cos(y) - \sin(x+y)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos(x) - \sin(x+y) = 0 \\ \cos(y) - \sin(x+y) = 0 \end{cases}$$

car à l'intérieur de $\Delta$, $\sin(x)$ et $\sin(y)$ sont non nuls

$$\iff \begin{cases} \cos(x) - \sin(x+y) = 0 \\ \cos(y) - \cos(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos(x) - \sin(2x) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

car $x$ et $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervalle sur lequel cos est injective

$$\iff \begin{cases} \cos(x)\left(1 - 2\sin(x)\right) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff x = y = \frac{\pi}{6}$$

D'où :
$\forall (x,y) \in \Delta \ f(x,y) \leq f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$

- **La solution de Deepseek**
  Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Montrons que :

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \frac{1}{8}.$$

### 1. Concavité de $\ln \circ \sin$

La fonction $\ln \circ \sin$ est concave sur $]0, \pi[$ car sa dérivée seconde est négative :

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln(\sin x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

### 2. Application de l'inégalité de Jensen

Par concavité et l'inégalité de Jensen :

$$\frac{\ln(\sin x) + \ln(\sin y) + \ln(\sin z)}{3} \leq \ln\left(\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right).$$

Avec $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{\ln(\sin x) + \ln(\sin y) + \ln(\sin z)}{3} \leq \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

En prenant l'exponentielle :

$$\sqrt[3]{\sin x \sin y \sin z} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x \sin y \sin z \leq \frac{1}{8}.$$

### 3. Cas d'égalité

L'égalité a lieu si et seulement si $x = y = z = \frac{\pi}{6}$, ce qui donne :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

### Conclusion

Nous avons donc démontré que pour tous $x, y, z \geq 0$ avec $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ :

$$\sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \frac{1}{8},$$

avec égalité si et seulement si $x = y = z = \frac{\pi}{6}$.

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \text{ tels que } x+y+z = \frac{\pi}{2}, \quad \sin(x)\sin(y)\sin(z) \leq \frac{1}{8}}$$