ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 1

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 *(Mines 2010)*

Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\forall k \in [\![1;n]\!]$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_k(x) = \dfrac{1}{x^2+k^2}$
$(f_k)_{1\leq k\leq n}$ est-elle libre ou liée dans E ?

Exercice 2 *(Mines 2022)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit E_p l'ensemble des suites complexes p-périodiques.

1. Montrer que E_p est un espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Donner une base de E_p formée de suites géométriques.

Exercice 3 *(Centrale 2010)*

Soient $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
La famille $(e_1+u,\dots,e_n+u)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4 *(CCP 2017)*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)-P(X)$.

1. Montrer que si P appartient au noyau de f, alors le polynôme $P-P(0)$ admet une infinité de racines.
   En déduire le noyau de f.
2. En utilisant le théorème du rang, montrer que $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-elle surjective ?

Exercice 5 *(Banque CCP MP)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f \Longrightarrow \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$.

(b) Démontrer que : $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$.

Exercice 6 *(X 2015)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, s une symétrie de E et p un projecteur de E.
Montrer : $(s-p)\circ(s+p) = 0 \Longrightarrow p = Id_E$

Exercice 7 *(Centrale 2015)*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
On note n la dimension de E et p celle de F.
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que $u \circ v = Id_F$.
Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.
Donner son noyau, son image et leurs dimensions.

Exercice 8 *(Mines 2012, 2017)*

Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :
$f \circ f = 0 \Longleftrightarrow \exists p \in \mathcal{L}(E)$ projecteur tel que $f = f \circ p - p \circ f$

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel de dimension n et u, $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u + v \in GL(E)$ et $u \circ v = 0$.
Montrer que $r(u) + r(v) = n$.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 10 *(Mines 2016)*

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).
Soit f un endomorphisme de de E tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Montrer :
   f bijective $\Longleftrightarrow f^2 + id = 0$
3. ?
4. ?
5. ?

Exercice 11 *(Mines 2011)*

Soit E de dimension finie n.
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = id_E$ et $rg(f) + rg(g) \leq n$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$ puis que f et g sont des projecteurs.

Exercice 12 *(Mines 2012)*

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x,y) \mapsto x + y \end{cases}$
Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.
On note $H = f^{-1}(F)$.

1. H est-il un espace vectoriel ?
2. Quelle est la dimension de H ?