

ALGEBRE LINEAIRE

TD

2025-2026

Chapitre 1

Correction

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 (*Mines 2010*)

Soit E le $\mathbb{R}$ -ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k^2}$$

$(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ est-elle libre ou liée dans E ?

Correction

- **Première méthode**

On intuite la liberté de la famille, ce qui impose la forme de la rédaction.

$$\text{Soit } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0.$$

A priori, cela signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0.$$

Mais $\mathbb{R}$ est infini et $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$ est une fonction rationnelle donc :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm ik; k \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0.$$

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

On multiplie par $x^2 + k^2$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm il; l \in \llbracket 1; n \rrbracket\} \quad \lambda_k + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \lambda_l \frac{x^2 + k^2}{x^2 + l^2} = 0$$

On fait tendre x vers ik et on obtient $\lambda_k = 0$.

- **Deuxième méthode**

On n'intuite rien. On raisonne par équivalence.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0 &\iff \forall x \in]-1; 1[\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0 \text{ car }]-1; 1[\text{ est infini et les } f_k \text{ rationnelles} \right. \\
 &\iff \forall x \in]-1; 1[\left[\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k^2} \frac{1}{1+x^2/k^2} = 0 \right. \\
 &\iff \forall x \in]-1; 1[\left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_k}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{k^{2l}} \right) = 0 \right. \\
 &\iff \forall x \in]-1; 1[\left[\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k^{2l+2}} \right) x^{2l} = 0 \right. \\
 &\iff \forall l \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{k^{2l+2}} = 0
 \end{aligned}$$

Si on considère ces conditions comme un système d'inconnues les λ_k les premières lignes sont :

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2} \\
 \frac{1}{1^{2+2}}, \frac{1}{2^{2+2}}, \dots, \frac{1}{n^{2+2}} \\
 \dots \\
 \frac{1}{1^{2+2(n-1)}}, \frac{1}{2^{2+2(n-1)}}, \dots, \frac{1}{n^{2+2(n-1)}}
 \end{array}$$

Si on se restreint aux n premières lignes, on obtient un système carré à n lignes et n colonnes.

Son déterminant est

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \dots & \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{1^{2+2}} & \frac{1}{2^{2+2}} & \dots & \frac{1}{n^{2+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{1^{2+2(n-1)}} & \frac{1}{2^{2+2(n-1)}} & \dots & \frac{1}{n^{2+2(n-1)}} \end{vmatrix} &= \frac{1}{1^2 2^2 \dots n^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{1^2} & \frac{1}{2^2} & \dots & \frac{1}{n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{1^{2(n-1)}} & \frac{1}{2^{2(n-1)}} & \dots & \frac{1}{n^{2(n-1)}} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{(n!)^2} VdM \left(1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

Le déterminant du système est donc non nul et tous les λ_i sont nuls.

Si on veut éviter le recours aux séries entières et se limiter au cours de première année,

on se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0$.

On fait alors un développement limité à l'ordre $2n-2$.

On en déduit un système de n équations à n inconnues mais on a perdu de l'information.

Ici on a de la chance, car ces n équations suffisent à prouver que les λ_i sont nuls (cf ci-dessus).

Exercice 2 (Mines 2022)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit E_p l'ensemble des suites complexes p -périodiques.

1. Montrer que E_p est un espace vectoriel et donner sa dimension.

2. Donner une base de E_p formée de suites géométriques.

Correction

1. On commence par montrer que E_p est un espace vectoriel.

- $E_p \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
- E_p contient la suite nulle.
- E_p est stable par combinaisons linéaires :

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N} (\lambda u + \mu v)_{n+p} = \lambda u_{n+p} + \mu v_{n+p} = \lambda u_n + \mu v_n = (\lambda u + \mu v)_n$$

On en déduit que E_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

On passe à la dimension de E_p .

$$\text{Soit } \Psi \begin{cases} E_p \rightarrow \mathbb{C}^p \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{cases}.$$

Ψ est linéaire :

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_p$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \dots, \lambda u_p + \mu v_p) \\ &= \lambda(u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) + \mu(v_0, v_1, \dots, v_{p-1}) \\ &= \lambda \Psi(u) + \mu \Psi(v) \end{aligned}$$

E_p peut être vu comme l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de récurrence $u_{n+p} = u_n$.

La donnée des p premières valeurs définit une et une seule suite vérifiant cette relation de récurrence. En d'autres termes, tout élément de $\mathbb{C}^p$ a un et un seul antécédent par Ψ . Ψ est donc bijective.

On en déduit que Ψ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

Finalement, $\dim(E_p) = \dim(\mathbb{C}^p) = p$.

2. Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$.

$$\omega^p = 1$$

Pour tout $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, soit U_r la suite géométrique de raison ω^r et de premier terme 1 :

$$\forall r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \forall n \in \mathbb{N} U_r(n) = (\omega^r)^n = \omega^{rn}$$

Pour tout $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $U_r \in E_p$:

$$\forall r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \forall n \in \mathbb{N} U_r(n+p) = \omega^{r(n+p)} = \omega^{rn} + (\omega^p)^n = \omega^{rn} = U_r(n).$$

$$\forall r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \Psi(U_r) = (1, \omega^r, \omega^{2r}, \dots, \omega^{r(p-1)})$$

$$\text{Le déterminant dans la base canonique de } \mathbb{C}^p \text{ de cette famille est } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{p-1} & \dots & (\omega^{p-1})^{p-1} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît le transposé d'un déterminant de Vandermonde.

Les ω^r , $r \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ étant deux à deux distincts, ce déterminant est non nul.

On en déduit que $(\Psi(U_0), \dots, \Psi(U_{p-1}))$ est une base de $\mathbb{C}^p$.

Ψ étant un isomorphisme, $(U_0, \dots, U_{p-1})$ est une base de E_p .

Exercice 3 (Centrale 2010)

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

La famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^n$?

Correction

Pas toujours, cf $u = -e_i$.

Dans le cas général, on écrit $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u) = 0$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) u = 0$$

On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

On somme ces n relations :

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

- **Premier cas :** $\sum_{i=1}^n x_i \neq -1$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i = \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

La famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

- **Deuxième cas :** $\sum_{i=1}^n x_i = -1$

Le système :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

n'est pas un système de Cramer puisque la somme de ses lignes est nulle.

On prend (ou encore on pose) $\lambda_i = -x_i$ pour i compris entre 1 et $n-1$ et $\lambda_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

On a donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et par conséquent :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

De plus :

$$\lambda_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1 + (-1 - x_n) = -x_n \text{ de sorte que :}$$

$$\lambda_n + x_n \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

et donc :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i + x_i \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$$

Mais ces nombres sont les coordonnées de $\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u)$ donc :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i + u) = 0$$

Les λ_i ne sont pas tous nuls car $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ donc la famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ est liée.

La famille $(e_1 + u, \dots, e_n + u)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 (CCP 2017)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que si P appartient au noyau de f , alors le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
En déduire le noyau de f .
2. En utilisant le théorème du rang, montrer que $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.
3. f est-elle surjective ?

Correction

1. Soit $P \in \text{Ker}(f)$.
 $P(X+1) - P(X) = 0$ donc :
 $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n+1) - P(n) = 0$
On en déduit (par une récurrence triviale) :
 $\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) = P(0)$.
Donc le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines.
C'est donc le polynôme nul et $P = P(0)$ est un polynôme constant.
Réciproquement si P est un polynôme constant $P(X+1) - P(X) = 0$.
Finalement $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

$$P(X) = a_{n+1} X^{n+1} + Q(X) \text{ avec } Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Il me semble qu'on peut affirmer ici sans justification que $Q(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :
 $P(X+1) - P(X) = a_{n+1} ((X+1)^{n+1} - X^{n+1}) + Q(X+1) - Q(X)$ avec $Q(X+1) - Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$(X+1)^{n+1} - X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^k - X^{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

Donc $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

D'après la formule du rang :

$$\begin{aligned} \dim(f(\mathbb{R}_{n+1}[X])) &= \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \mathbb{R}_{n+1}[X]) \\ &= \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathbb{R}_0[X] \cap \mathbb{R}_{n+1}[X]) = \dim(\mathbb{R}_{n+1}[X]) - \dim(\mathbb{R}_0[X]) \\ &= n+2-1 = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \end{aligned}$$

Avec l'inclusion précédente, on a $f(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

3. f n'est pas injective. Si f était un endomorphisme d'un espace de dimension finie, on pourrait en déduire que f n'est pas surjective mais $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie. En fait f est surjective.
 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (prendre n le degré de P si P est non nul et $n = 0$ si P est nul).
 D'après la question précédente, P a un antécédent par f .

Exercice 5 (Banque CCP MP)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f \implies \text{Im} f = \text{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
 (b) Démontrer que : $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \implies E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

Correction

1. Supposons $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.
 Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$ (*)
 Montrons que $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$.
 Soit $y \in \text{Im} f$.
 Alors, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.
 Or $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$, donc $\exists (a, b) \in E \times \text{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
 On a alors $y = f^2(a) \in \text{Im} f^2$.
 Ainsi $\text{Im} f \subset \text{Im} f^2$ (**)
 D'après (*) et (**), $\text{Im} f = \text{Im} f^2$.
2. (a) On a $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$ et $\text{Ker} f \subset \text{Ker} f^2$.
 On en déduit que $\text{Im} f^2 = \text{Im} f \iff \text{rg} f^2 = \text{rg} f$ et $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2$.
 Alors, en utilisant le théorème du rang, $\text{Im} f = \text{Im} f^2 \iff \text{rg} f = \text{rg} f^2 \iff \dim \text{Ker} f = \dim \text{Ker} f^2 \iff \text{Ker} f = \text{Ker} f^2$.
 (b) Supposons $\text{Im} f = \text{Im} f^2$.
 Soit $x \in \text{Im} f \cap \text{Ker} f$.
 $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
 On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \text{Ker} f^2$.
 Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\text{Ker} f^2 = \text{Ker} f$ donc $a \in \text{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
 C'est-à-dire $x = 0$.
 Ainsi $\text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
 De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f = \dim E$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $E = \text{Im} f \oplus \text{Ker} f$.

Exercice 6 (X 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, s une symétrie de E et p un projecteur de E .
 Montrer : $(s - p) \circ (s + p) = 0 \implies p = Id_E$

Correction

On suppose $(s - p) \circ (s + p) = 0$.

On en déduit $s^2 + sp - ps - p^2 = id_E + sp - ps - p = 0$ donc :

$$ps - sp + p = id$$

On compose par p à gauche :

$$ps - psp + p = p \text{ ie } ps = psp.$$

On compose par p à droite :

$$psp - sp + p = p \text{ ie } sp = psp.$$

On en déduit $ps = sp$ puis $p = id_E$.

Exercice 7 (Centrale 2015)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

On note n la dimension de E et p celle de F .

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = Id_F$.

Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.

Donner son noyau, son image et leurs dimensions.

Correction

$$(v \circ u)^2 = v \circ u \circ v \circ u = v \circ (u \circ v) \circ u = v \circ u.$$

Donc $v \circ u$ est un projecteur.

$$\ker(u) \subset \ker(v \circ u).$$

Réciproquement, soit $x \in \ker(v \circ u)$.

En particulier $x \in E$ et $u(x) \in F$.

$$u(x) = (u \circ v)(u(x)) = u(v \circ u(x)) = u(0) = 0 \text{ et } x \in \ker u.$$

On a donc $\ker(v \circ u) = \ker(u)$.

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v).$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(v)$.

$$\exists y \in F \text{ tq } x = v(y).$$

$$x = v(y) = v((u \circ v)(y)) = (v \circ u)(v(y)) \in \text{Im}(v \circ u)$$

On a donc $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v)$.

$u \circ v = Id_F$ est injective donc v est injective.

On en déduit $\dim(\text{Im}(v \circ u)) = \dim(\text{Im}(v)) = p$ par la formule du rang.

$u \circ v = Id_F$ est surjective donc u est surjective.

On en déduit $\dim(\ker(v \circ u)) = \dim(\ker(u)) = n - p$ par la formule du rang appliquée à u .

On vérifie que la formule du rang appliquée à $v \circ u$ est juste.

Exercice 8 (Mines 2012, 2017)

Soient E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :

$$f \circ f = 0 \iff \exists p \in \mathcal{L}(E) \text{ projecteur tel que } f = f \circ p - p \circ f$$

Correction

• $\Leftarrow$

On compose par p à droite :

$$f \circ p = f \circ p - p \circ f \circ p$$

$$\text{Donc } p \circ f \circ p = 0$$

On compose par p à gauche :

$$p \circ f = p \circ f \circ p - p \circ f = 0 - p \circ f = -p \circ f$$

Donc : $p \circ f = 0$

Donc $f = f \circ p$ et $f^2 = f \circ p \circ f \circ p = f \circ 0 = 0$

• $\implies$

On a vu dans le sens $\Leftarrow$ que si p existe on a $p \circ f = 0$ et $f = f \circ p$.

Or :

$p \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(p)$

et :

$f = f \circ p \iff f \circ (id_E - p) = 0 \iff \text{Im}(id_E - p) \subset \text{Ker}(f)$

Mais $id_E - p$ est le projecteur associé à p son image est égale au noyau de p .

On peut passer à la démonstration du sens $\implies$:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ f = 0$.

$f \circ f = 0$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

Il existe donc un projecteur p tel que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(f)$.

D'après les équivalences ci-dessus, $p \circ f = 0$ et $f \circ p = f$ donc $f = f \circ p - p \circ f$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u + v \in GL(E)$ et $u \circ v = 0$.
Montrer que $r(u) + r(v) = n$.

Correction

$u \circ v = 0$ donc $\text{Im } v \subset \text{Ker } u$.

Donc $r(v) \leq \dim \text{Ker } u = n - r(u)$.

Donc $r(u) + r(v) \leq n$.

Soit $y \in \text{Im}(u + v)$.

$\exists x \in E$ tq $y = (u + v)(x)$

D'où $y = u(x) + v(x) \in \text{Im } u + \text{Im } v$.

Donc $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$.

Donc :

$$\begin{aligned} r(u + v) = n &\leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \\ &\leq \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) - \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) \\ &\leq r(u) + r(v) \end{aligned}$$

D'où $r(u) + r(v) = n$.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 10 (*Mines 2016*)

Soit E un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.
2. Montrer :
 f bijective $\iff f^2 + id = 0$
3. ?
4. ?

5. ?

Correction1. Soit $x \in E$.On suppose $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(f)$ et $z \in \text{Ker}(f)$. $y \in \text{Im}(f)$ donc il existe $y_1 \in E$ tel que $y = f(y_1)$.

$$x = f(y_1) + z$$

$$f(x) = f^2(y_1) \text{ car } z \in \text{Ker}(f)$$

$$f^2(x) = f^3(y_1) = -f(y_1) = -y$$

$$y = -f^2(x) \text{ et } z = x - y = x + f^2(x)$$

D'où l'unicité en cas d'existence.

Réciproquement, on pose $y = -f^2(x)$ et $z = x - y = x + f^2(x)$.

$$y + z = x$$

$$y = -f^2(x) = f(-f(x)) \in \text{Im}(f)$$

$$f(z) = f(x) + f^3(x) = 0 \text{ car } f + f^3 = 0$$

2. $\implies$: trivial, il suffit de composer par f^{-1} . $\impliedby$: Soit $x \in \text{Ker}(f)$.

$$x = -f^2(x) = -f(f(x)) = -f(0) = 0$$

$$\text{Ker}(f) = \{0\}.$$

 f est donc injective.En utilisant la première question, on voit que f est surjective.On peut aussi remarquer que $f \circ (-f) = (-f) \circ f = Id$ (attention la dimension est quelconque).**Exercice 11** (*Mines 2011*)Soit E de dimension finie n .Soient f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = id_E$ et $rg(f) + rg(g) \leq n$.Montrer que $E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$ puis que f et g sont des projecteurs.**Correction**

$$E = \text{Im}(id_E) = \text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g) \subset E \text{ donc } E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g).$$

$$\text{Donc } n = rg(f) + rg(g) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g))$$

$$\text{Donc } \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)) = rg(f) + rg(g) - n \leq 0.$$

$$\text{Donc } \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \text{ et } E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g.$$

Soit $x \in E$.

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g \text{ donc :}$$

$$\exists!(x_{\text{Im } f}, x_{\text{Im } g}) \in \text{Im } f \times \text{Im } g \text{ tq } x = x_{\text{Im } f} + x_{\text{Im } g}.$$

 $x_{\text{Im } f}$ est le projeté de x sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Im } g$.

$$f + g = id_E \text{ donc } x = f(x) + g(x).$$

$$\text{Mais } f(x) \in \text{Im } f \text{ et } g(x) \in \text{Im } g \text{ donc } f(x) = x_{\text{Im } f} \text{ et } g(x) = x_{\text{Im } g}.$$

On en déduit que f et g sont des projecteurs.**Exercice 12** (*Mines 2012*)

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension p .

$$\text{On note } H = f^{-1}(F).$$

1. H est-il un espace vectoriel ?
2. Quelle est la dimension de H ?

Correction

1. Oui car H est un sev de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:
 - $H \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: clair
 - $0 + 0 = 0 \in F$ car F est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc $(0, 0) \in H$.
 - H est stable par combinaisons linéaires :
 Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de H et λ_1, λ_2 deux réels.
 $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$ et :
 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 (x_1 + y_1 \in F) + \lambda_2 (x_2 + y_2 \in F) \in F$ car F est un sev de $\mathbb{R}^n$.
 Donc $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in H$
2. Soit $g \begin{cases} H \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto f((x, y)) = x + y \end{cases}$
 $\text{Ker } g = \text{Ker } f = \{(x, -x), x \in \mathbb{R}^n\}$ est de dimension n .
 $\text{Im } g = \text{Im } f \cap F = F$ car F est surjective.
 Donc $\dim H = n + \dim F$

Autre méthode envisageable :

$$H = \{(x; x_F - x), x \in \mathbb{R}^n, x_F \in F\}$$

D'où un isomorphisme de H sur $\mathbb{R}^n \times F$:

$$\varphi \begin{cases} H \rightarrow \mathbb{R}^n \times F \\ (x, y) \mapsto (x, y + x) \end{cases}$$