ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 1

941

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
Montrer qu'il existe deux réels A et B indépendants de f tels que :
$\sup_{\mathbb{R}} (|f|) \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0;1], \mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$.
   Montrer :
   $\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3$
   avec M indépendant de k et de t.

   (b) En déduire :
   $S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

Exercice 3

Discuter selon la valeur de α de l'intégralité de la fonction $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{|\ln(1-x)|^\alpha}{x^2} \end{cases}$

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 4

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin\left(x^8\right) \mathrm{d}x$?

Exercice 5

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln x\right) \mathrm{d}x$?

Exercice 6 *(Mines 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$?

Exercice 7 *(Centrale 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \mathrm{d}x$?

Exercice 8 *(Mines 2012)*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) \times \sin(x)}{x}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ converge mais que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 *(X 2015)*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^A \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \mathrm{d}t$ a une limite finie quand A tend vers $+\infty$ (on ne demande pas de la calculer).

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 10 *(X 2019)*

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(a+u^2\right)}{u^2} \mathrm{d}u \quad a > 0$$

- Calcul
- $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I$

Exercice 11 *(Mines 2019)*

Soient $I =]0;+\infty[$ et $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}) \text{ tq } \forall s > 0 \ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \text{ est intégrable sur } I \right\}$.

Pour $f \in E$, on définit $\widehat{f} \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s} \mathrm{d}u \end{cases}$.

1. Soit $L = \{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}) \text{ intégrable sur } I \}$.
   Comparer L et E pour l'inclusion.

2. Soit $f_\alpha \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ u \mapsto u^{\alpha-1} \end{cases}$.
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha \in E$.
   Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α.
3. ?

Exercice 12 *(Mines 2016)*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 13 *(X 2016)*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice 14 *(Centrale 2012)*

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer qu'elle converge et la calculer.

Exercice 15 *(Mines 2021)*

Soit $\lambda > 0$.
Calculer (et montrer l'existence de) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

2.4 Fonctions intégrables

Exercice 16 *(X 2017)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable et de dérivée bornée.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

2.5 Comportements asymptotiques

Exercice 17 *(Mines 2022)*

Limite et équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.