ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 1
Correction

941

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
Montrer qu'il existe deux réels A et B indépendants de f tels que :
$\sup\limits_{\mathbb{R}} (|f|) \leq A \displaystyle\int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$

Correction
f est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc :
$\exists (x_m, x_M) \in [0; 2\pi]^2$ tq $\forall x \in [0; 2\pi]$ $|f(x_m)| \leq |f(x)| \leq |f(x_M)|$
f étant 2π-périodique, $\sup\limits_{\mathbb{R}} (|f|) = |f(x_M)|$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} (|f|) &= |f(x_M)| = |f(x_M) - f(x_m) + f(x_m)| \\
&\leq |f(x_M) - f(x_m)| + |f(x_m)| \\
&\leq \left| \int_{x_m}^{x_M} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| + |f(x_m)| \text{ car } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
&\leq \int_{\min(x_m, x_M)}^{\max(x_m, x_M)} |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_m)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0; 1], \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$.
   Montrer :

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3$$

avec M indépendant de k et de t.

(b) En déduire :

$$S_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction

1. D'après le cours de Sup sur les sommes de Riemann :

$$S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) f étant de classe $\mathcal{C}^3$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{3!}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 \sup_{x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]}\left(f^{(3)}(x)\right)$$

Par conséquent, $M=\sup\limits_{x\in[0;1]}\left(f^{(3)}(x)\right)$ convient.

(b) On intègre l'inégalité précédente entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$.

$$\begin{aligned}
&\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t\\
\leq\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\mathrm{d}t=\left[\frac{M}{24}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n}\\
\leq\ &\frac{M}{24n^4}
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de la moyenne, on en déduit :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{24n^4}$$

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n}=\frac{1}{2n^2}$$

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n}=\frac{1}{3n^3}$$

Donc :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{24n^4}$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{24n^3}$$

Avec l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles, on en déduit :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-S_n(f)-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leq \frac{M}{24n^3}$$

Donc $S_n(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

f' et f'' sont continues donc :

$S_n(f')\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $S_n(f')=\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+o(1)$

$S_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1)$
Donc :
$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n}\right)$
En reprenant ce qui précède, on voit que f de classe $\mathcal{C}^2$ suffit pour ce développement donc :
$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n}\right)$
On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \frac{1}{12n^2}\left(f'(1)-f'(0)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

Exercice 3

Discuter selon la valeur de α de l'intégralité de la fonction $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{|\ln(1-x)|^\alpha}{x^2} \end{cases}$

Correction
f est continue sur $]0;1[$.
En 0 : $f(x) \sim x^{\alpha-2} = \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$
Donc :
f est intégrable sur $]0;1/2] \iff 2-\alpha < 1 \iff \alpha > 1$
En 1 : $\sqrt{1-x}f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}|\ln(1-x)|^\alpha}{x^2} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \dfrac{0}{1} = 0$
Donc en 1 : $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$.
On en déduit que f est intégrable sur $[1/2;1[$ (pour toute valeur de α).
Finalement :
f est intégrable sur $]0;1[\iff \alpha > 1$

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 4

Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x$?

Correction
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\sin(x^8) \end{cases}$.
f est continue.
$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge
On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = x^8$:

$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{8\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge

D'après les exemples du cours, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{8\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

Exercice 5

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$?

Correction

Soit $f \begin{cases}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(\ln x) \end{cases}$

f est continue.

$\forall x \in]0;1]\ |\sin(\ln x)| \leq 1$

Or $x \mapsto 1$ est intégrable sur $]0;1]$ donc f est intégrable sur $]0;1]$.

Finalement : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument).

Exercice 6 *(Mines 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$?

Correction

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sin x}{x}\left(1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

D'après les exemples du cours, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Si $g(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ alors g est intégrable sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

Par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge

Exercice 7 *(Centrale 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$?

Correction
Remarque préliminaire
$f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de signe constant (positive si $\alpha \geq 0$, négative si $\alpha \leq 0$)
Donc :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge $\iff f$ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} (x+1)^\alpha - x^\alpha &= x^\alpha \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - x^\alpha \\ &= x^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Donc si $\alpha \neq 0$, $(x+1)^\alpha - x^\alpha \sim \dfrac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$

Si $\alpha = 0$, alors $f = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ **converge**.

Dans la suite, on suppose $\alpha \neq 0$.

$f(x) \sim \dfrac{\alpha}{x^{\beta+1-\alpha}}$

$$\begin{aligned} f \text{ est intégrable sur } [1;+\infty[&\iff \beta + 1 - \alpha > 1 \\ &\iff \beta > \alpha \end{aligned}$$

En 0

- **Premier cas :** $\alpha > 0$
  $(x+1)^\alpha \to 1$ et $x^\alpha \to 0$
  $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\beta}$
  f est intégrable sur $]0;1] \iff \beta < 1$
- **Deuxième cas :** $\alpha < 0$
  $(x+1)^\alpha \to 1$ et $x^\alpha \to +\infty$
  $f(x) \sim \dfrac{-x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{-1}{x^{\beta-\alpha}}$
  f est intégrable sur $]0;1] \iff \beta - \alpha < 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{ ou} \\ 0 < \alpha < \beta < 1 \\ \text{ ou} \\ \alpha < \beta < 1 + \alpha < 1 \text{ (la dernière pour exprimer } \alpha < 0) \end{cases}$$

Exercice 8 *(Mines 2012)*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) \times \sin(x)}{x}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge mais que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \ln x \end{cases}$
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par les accroissements finis :
$\forall x \in \mathbb{R}\ |\sin x| \leq |x|$.
On en déduit :
$\forall x \in]0;1]\ |f(x)| \leq |\ln x|$
La fonction ln est intégrable sur $]0;1]$ donc f est intégrable sur $]0;1]$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

$$\text{IPP} \quad u(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad u'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$v'(x) = \sin x \qquad v(x) = -\cos x$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
$x^{3/2}\dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{\cos x(1-\ln x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.
$\dfrac{3}{2} > 1$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Finalement :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour l'intégrabilité, on utilise :
$\forall x \geq \mathrm{e}\ |f(x)| \geq \dfrac{|\sin x|}{x}$
ce qui nous ramène au cours.

Exercice 9 *(X 2015)*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^A \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand A tend vers $+\infty$ (on ne demande pas de la calculer).

Correction
On va faire une intégration par parties en écrivant

$\displaystyle\int_0^A \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{t^2+x}(t^2+x)\cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\mathrm{d}t$
mais t^2+x peut s'annuler quand x est négatif, ce qui oblige à prendre des précautions.

Pour commencer, la fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\cos\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right)\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Il existe $t_0>0$ tel que :
$\forall t\geq t_0\ t^2+x>0$
et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soient $u\begin{cases}[t_0;+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\dfrac{1}{t^2+x}\end{cases}$ et $v\begin{cases}[t_0;+\infty[\to\mathbb{R}\\ t\mapsto\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right)\end{cases}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $f=uv'$.
$u(t)v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.
$\forall t\geq t_0\ u'(t)v(t)=-\dfrac{2t}{(t^2+x)^2}\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right)=O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc $u'v$ est intégrable sur $[t_0;+\infty[$.
Donc $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 10 *(X 2019)*

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(a+u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u\quad a>0$$

- Calcul
- $\lim\limits_{a\to+\infty} I$

Correction

- Soit $f\begin{cases}[1;+\infty[\to\mathbb{R}\\ u\mapsto\dfrac{\ln(a+u^2)}{u^2}\end{cases}$.
  f est continue.
  En $+\infty$, $\dfrac{\ln(a+u^2)}{u^2}\sim\dfrac{2\ln(u)}{u^2}=o\left(\dfrac{1}{u^{3/2}}\right)$
  Donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$

$$\text{IPP :}\quad u'(x)=\frac{1}{x^2}\qquad u(x)=-\frac{1}{x}$$
$$v(x)=\ln\left(a+x^2\right)\qquad v'(x)=\frac{2x}{a+x^2}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$.
$u(x)v(x)=\dfrac{\ln(a+x^2)}{x}\sim\dfrac{2\ln(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

L'IPP est justifiée.

$$\begin{aligned} I &= \ln(1+a) + 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a+x^2} = \ln(1+a) + 2\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \ln(1+a) + \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right) = \ln(1+a) + \frac{2}{\sqrt{a}}\arctan(\sqrt{a}) \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{a\to+\infty} I = +\infty$

Exercice 11 *(Mines 2019)*

Soient $I =]0;+\infty[$ et $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}) \text{ tq } \forall s > 0 \ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \text{ est intégrable sur } I \right\}$.

Pour $f \in E$, on définit $\widehat{f} \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,\mathrm{d}u \end{cases}$.

1. Soit $L = \{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}) \text{ intégrable sur } I \}$.
   Comparer L et E pour l'inclusion.
2. Soit $f_\alpha \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ u \mapsto u^{\alpha-1} \end{cases}$.
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha \in E$.
   Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α.
3. ?

Correction

1. - Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I.
     Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
     $\forall u \in I \ \left|\dfrac{f(u)}{u+s}\right| = \dfrac{|f(u)|}{u+s} \leq \dfrac{|f(u)|}{s}$
     avec $\dfrac{|f|}{s}$ continue, à valeurs réelles positives et intégrable sur I.
     Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est intégrable sur I.
     On en déduit que $f \in E$.
     On a donc prouvé : $L \subset E$.
   - Soit $f \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{1}{u+1} \end{cases}$
     — f est continue sur I.
     — Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
     La fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est intégrable sur $]0;1]$.
     De plus :
     $\forall u \in [1;+\infty[\ 0 \leq \dfrac{f(u)}{u+s} = \dfrac{1}{u+1}.\dfrac{1}{u+s} \leq \dfrac{1}{u^2}$

avec $\begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto \dfrac{1}{u^2} \end{cases}$ continue, positive et intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est intégrable sur I.

On a donc $f \in E$.

Par contre $f \notin L$:

$f(u) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u}$ donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ ni a fortiori sur I.

Finalement L est strictement inclus dans E.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α est continue sur I.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{f_\alpha(u)}{u+s} \sim_0 \dfrac{1}{su^{1-\alpha}}$
$\dfrac{f_\alpha(u)}{u+s} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$
On en déduit :
$F_\alpha \in E \iff 1-\alpha < 1$ et $2-\alpha > 1$
puis :
$$\boxed{f_\alpha \in E \iff \alpha \in]0;1[}$$
Soit $\alpha \in]0;1[$.
Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u = st$ donne :
$$\begin{aligned} \widehat{f_\alpha}(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{f_\alpha(u)}{u+s}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{s^{\alpha-1}u^{\alpha-1}}{s(1+u)} s\,\mathrm{d}u \\ &= s^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$
et finalement :
$$\boxed{\widehat{f_\alpha} = \widehat{f_\alpha}(1).f_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}dt\right).f_\alpha}$$

3. Cf Centrale PC1 1998

Exercice 12 *(Mines 2016)*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

Correction
Soit $f \begin{cases}]a;b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x \end{cases}$.

f est continue sur $]a;b[$.
Si a ou $b = 0$, il y a un problème pour l'équivalent mais $f(x) = O_a\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}\right)$ et $f(x) = O_b\left(\frac{1}{\sqrt{b-x}}\right)$ donc f est intégrable sur $]a;b[$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]a;b[\ (x-a)(b-x) &= -ab + (a+b)x - x^2 \\
&= -ab + \frac{(a+b)^2}{4} - \left(x^2 - (a+b)x + \frac{(a+b)^2}{4}\right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{4}\left(1 - \left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

On fait donc le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $t = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{b-a}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \frac{a+b}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a+b}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ par parité} \\
&= \frac{a+b}{2}\left[\arcsin t\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{\pi(a+b)}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 13 *(X 2016)*

Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Correction
Soit $f \begin{cases}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{cases}$.
f est continue.
En $+\infty$, $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$
Donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$
En 0, $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
(car $1 + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ et ce sont des infiniment grands)
Donc $f(x) \sim -2\ln x$.
Donc f est intégrable sur $]0;1]$.

$$\text{IPP :} \quad u'(x) = 1 \qquad u(x) = x$$
$$v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \qquad v'(x) = -\frac{2}{x + x^3}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(x)v(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
$u(x)v(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim -2x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
L'IPP est justifiée.
$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \pi$

Exercice 14 *(Centrale 2012)*

On considère l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer qu'elle converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \end{cases}$.
f est continue.
$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1$
$\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \sim_{1^-} \ln(1-t)$
Comme ln est intégrable sur $]0;1/2[$, par changement de variable ($x = 1-t$) $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $[1/2;1[$).
Donc f est intégrable sur $]0;1[$.

On fait une IPP :
$u(t) = \ln(1-t^2)$, $u'(t) = \frac{-2t}{1-t^2}$
$v'(t) = \frac{1}{t^2}$, $v(t) = \frac{-1}{t}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ et :
$u(t)v(t) = -\frac{\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$
Par contre $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to 1]{} +\infty$
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-h} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{\ln(1-(1-h)^2)}{1-h} - 2\int_0^{1-h} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= -\frac{\ln(2h-h^2)}{1-h} - \ln\left(\frac{1+1-h}{1-1+h}\right) \\
&= -\frac{1}{1-h}\left(\ln 2 + \ln h + \ln\left(1 - \frac{h}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) \\
&= (-1 + h + o(h))(\ln 2 + \ln h + o(1)) + \ln h - \ln 2 - \ln\left(1 - \frac{h}{2}\right) \\
&= -\ln 2 - \ln h + o(1) + \ln h - \ln 2 = -2\ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2$$

Exercice 15 *(Mines 2021)*

Soit $\lambda > 0$.
Calculer (et montrer l'existence de) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

Correction
L'existence est facile à justifier :

- La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \left|\mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\right| = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}$
  avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ $(\lambda > 0)$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus : $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda(u+k\pi)}\,|\sin(u+k\pi)|\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{e}^{-\lambda k\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\sin(u)\,\mathrm{d}u \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-\lambda\pi}\right)^k
\end{aligned}$$

On en déduit que $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\sin(u)\,\mathrm{d}u \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda\pi}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda\pi}} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\sin(u)\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\sin(u)\,\mathrm{d}u &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{e}^{iu}\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-\lambda)u}}{i-\lambda}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-\lambda\pi}-1}{i-\lambda}\right) \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-\lambda\pi}}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2.4 Fonctions intégrables

Exercice 16 *(X 2017)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable et de dérivée bornée.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

Correction
Par hypothèse, il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ tq :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f'(x)| \leq M$
Soit F la primitive de f nulle en 0 :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Par hypothèse, $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$.
Soit $\epsilon_1 > 0$ à choisir plus tard.
$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0 \ |F(x) - l| \leq \epsilon_1$
On en déduit :
$\forall (x,y) \in [x_0; +\infty[^2 \ |F(x) - F(y)| = |F(x) - l + l - F(y)| \leq |F(x) - l| + |l - F(y)| \leq 2\epsilon_1$
Soit $x \geq x_0$ et $h > 0$ à choisir plus tard.
$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \displaystyle\int_x^{x+h} (x+h-t)F''(t)\,\mathrm{d}t = F(x) + hf(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t)f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit $f(x) = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} (x+h-t)f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (x+h-t)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{M}{h}\int_x^{x+h} (x+h-t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{M}{h}\left[-\frac{(x+h-t)^2}{2}\right]_x^{x+h} \\
&\leq \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{Mh}{2}
\end{aligned}$$

Soit $\phi \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \dfrac{2\epsilon_1}{h} + \dfrac{Mh}{2} \end{cases}$.
ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$\forall h > 0 \ \phi'(h) = -\dfrac{2\epsilon_1}{h^2} + \dfrac{M}{2} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{M}{2}h^2 - 2\epsilon_1\right)$
Si on pose $h_0 = 2\sqrt{\dfrac{\epsilon_1}{M}}$, on a :

$$|f(x)| \leq \frac{2\epsilon_1}{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{M}}} + \frac{M2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{M}}}{2} = 2\sqrt{\epsilon_1 M}$$

Si on prend $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon^2}{4M}$ alors, pour tout $x \geq x_0$, $|f(x)| \leq \epsilon$.
En revenant donc à la définition, on a prouvé $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2.5 Comportements asymptotiques

Exercice 17 *(Mines 2022)*

Limite et équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction

$$\begin{aligned}
\forall x>0\ \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t}t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{e}^{x^2}\left(\left[\frac{1}{t}\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}\frac{-1}{t^2}\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\ \text{IPP facile à justifier}\\
&= \frac{1}{2x}-\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\forall x>0\ 0\leq\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Donc $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t=o\left(\mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.

Finalement : $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{2x}$.