ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 1
Correction

941

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1 *(Mines 2023)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
Montrer qu'il existe deux réels A et B indépendants de f tels que :
$\sup_{\mathbb{R}} (|f|) \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$

Correction
f est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc :
$\exists (x_m, x_M) \in [0; 2\pi]^2$ tq $\forall x \in [0; 2\pi]$ $|f(x_m)| \leq |f(x)| \leq |f(x_M)|$
f étant 2π-périodique, $\sup_{\mathbb{R}} (|f|) = |f(x_M)|$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}} (|f|) &= |f(x_M)| = |f(x_M) - f(x_m) + f(x_m)| \\
&\leq |f(x_M) - f(x_m)| + |f(x_m)| \\
&\leq \left| \int_{x_m}^{x_M} f'(t)\,\mathrm{d}t \right| + |f(x_m)| \text{ car } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
&\leq \int_{\min(x_m, x_M)}^{\max(x_m, x_M)} |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_m)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(Centrale 2023)*

Soit $f \in \mathcal{C}^3([0; 1], \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. (a) Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$.
   Montrer :

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3$$

avec M indépendant de k et de t.

(b) En déduire :

$$S_n(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction

1. D'après le cours de Sup sur les sommes de Riemann :

$$S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. (a) f étant de classe $\mathcal{C}^3$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq \frac{1}{3!}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\sup_{x\in\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]}\left(f^{(3)}(x)\right)$$

Par conséquent, $M=\sup\limits_{x\in[0;1]}\left(f^{(3)}(x)\right)$ convient.

(b) L'idée essentielle sur les sommes de Riemann est qu'il s'agit de la somme d'aires de rectangles :

$$S_n(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t$$

La question précédente étudie l'écart entre $f(t)$ et $f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour t compris entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{(k+1)}{n}$.

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)+\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On intègre l'inégalité de la question précédente entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$.

$$\begin{aligned}
&\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t\\
\leq\ &\int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\mathrm{d}t=\left[\frac{M}{24}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n}\\
\leq\ &\frac{M}{24n^4}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)+\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right|\leq\frac{M}{24n^4}$$

On en déduit :

$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(t)+\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3}$

Donc :

$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{1}{2n^2}$

$\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{1}{3n^3}$

Donc :

$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

f' et f'' sont continues donc :

$S_n(f') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + o(1)$

$S_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$ ce qu'on peut écrire $S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1)$

Donc :

$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n}\right)$

En reprenant ce qui précède, on voit que f de classe $\mathcal{C}^2$ suffit pour ce développement donc :

$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \frac{1}{12n^2}\left(f'(1)-f'(0)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

Exercice 3

Discuter selon la valeur de α de l'intégralité de la fonction $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{|\ln(1-x)|^\alpha}{x^2} \end{cases}$

Correction

f est continue sur $]0;1[$.

En 0 : $f(x) \sim x^{\alpha-2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$

Donc :
f est intégrable sur $]0;1/2] \iff 2-\alpha<1 \iff \alpha>1$
En 1 : $\sqrt{1-x}f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}|\ln(1-x)|^\alpha}{x^2}\xrightarrow[x\to 1^-]{}\dfrac{0}{1}=0$
Donc en 1 : $f(x)=o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$.
On en déduit que f est intégrable sur $[1/2;1[$ (pour toute valeur de α).
Finalement :
f est intégrable sur $]0;1[\iff \alpha>1$

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 4

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,\mathrm{d}x$?

Correction
Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^3\sin(x^8)\end{cases}$.
f est continue.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge
On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t=x^8$:
$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,\mathrm{d}x$ converge $\iff \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{8\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge
D'après les exemples du cours, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{8\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$$

Exercice 5

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$?

Correction
Soit $f\begin{cases}]0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \sin(\ln x)\end{cases}$

f est continue.
$\forall x\in]0;1]\ |\sin(\ln x)|\leq 1$
Or $x\mapsto 1$ est intégrable sur $]0;1]$ donc f est intégrable sur $]0;1]$.
Finalement : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument).

Exercice 6 *(Mines 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$?

Correction

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sin x}{x}\left(1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

D'après les exemples du cours, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Si $g(x) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ alors g est intégrable sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

Par linéarité, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Finalement, par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge

Exercice 7 *(Centrale 2011)*

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$?

Correction
Remarque préliminaire
$f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de signe constant (positive si $\alpha \geq 0$, négative si $\alpha \leq 0$)
Donc :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge $\Longleftrightarrow$ f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} (x+1)^\alpha - x^\alpha &= x^\alpha\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - x^\alpha \\ &= x^\alpha\left(1+\frac{\alpha}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right) \end{aligned}$$

Donc si $\alpha \neq 0$, $(x+1)^\alpha - x^\alpha \sim \dfrac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$

Si $\alpha = 0$, alors $f = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$ **converge**.

Dans la suite, on suppose $\alpha \neq 0$.

$f(x) \sim \dfrac{\alpha}{x^{\beta+1-\alpha}}$

$$\begin{aligned} f \text{ est intégrable sur } [1;+\infty[&\Longleftrightarrow \beta+1-\alpha > 1 \\ &\Longleftrightarrow \beta > \alpha \end{aligned}$$

En 0

- **Premier cas :** $\alpha > 0$
  $(x+1)^\alpha \to 1$ et $x^\alpha \to 0$
  $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\beta}$
  f est intégrable sur $]0;1] \iff \beta < 1$
- **Deuxième cas :** $\alpha < 0$
  $(x+1)^\alpha \to 1$ et $x^\alpha \to +\infty$
  $f(x) \sim \dfrac{-x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{-1}{x^{\beta-\alpha}}$
  f est intégrable sur $]0;1] \iff \beta - \alpha < 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{ou} \\ 0 < \alpha < \beta < 1 \\ \text{ou} \\ \alpha < \beta < 1+\alpha < 1 \text{ (la dernière pour exprimer } \alpha < 0) \end{cases}$$

Exercice 8 *(Mines 2012)*

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) \times \sin(x)}{x}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge mais que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} \ln x \end{cases}$
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par les accroissements finis :
$\forall x \in \mathbb{R} \ \ |\sin x| \leq |x|$.
On en déduit :
$\forall x \in]0;1] \ \ |f(x)| \leq |\ln x|$
La fonction ln est intégrable sur $]0;1]$ donc f est intégrable sur $]0;1]$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

$$\text{IPP} \quad \begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{\ln x}{x} & u'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \\ v'(x) = \sin x & v(x) = -\cos x \end{array}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
$x^{3/2}\dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{\cos x(1-\ln x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.
$\dfrac{3}{2} > 1$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x(1-\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.
Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Finalement :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Pour l'intégrabilité, on utilise :
$\forall x \geq \mathrm{e}\ |f(x)| \geq \dfrac{|\sin x|}{x}$
ce qui nous ramène au cours.

Exercice 9 *(X 2015)*

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^A \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand A tend vers $+\infty$ (on ne demande pas de la calculer).

Correction
On va faire une intégration par parties en écrivant
$\displaystyle\int_0^A \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{t^2+x}(t^2+x)\cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)\mathrm{d}t$
mais t^2+x peut s'annuler quand x est négatif, ce qui oblige à prendre des précautions.

Pour commencer, la fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ t \mapsto \cos\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right)\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Il existe $t_0 > 0$ tel que :
$\forall t \geq t_0\ t^2+x > 0$
et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Soient $u\begin{cases}[t_0;+\infty[\to \mathbb{R}\\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x}\end{cases}$ et $v\begin{cases}[t_0;+\infty[\to \mathbb{R}\\ t \mapsto \sin\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right)\end{cases}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $f = uv'$.
$u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.
$\forall t \geq t_0\ u'(t)v(t) = -\dfrac{2t}{(t^2+x)^2}\sin\left(\dfrac{t^3}{3}+xt\right) = O\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$ donc $u'v$ est intégrable sur $[t_0;+\infty[$.
Donc $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Autre méthode
On fait le changement de variable $y = \varphi(t) = \dfrac{t^3}{3}+xt$
φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \varphi'(t) = t^2+x$
Il existe $t_0 > 0$ tel que :

$\forall t \geq t_0 \; t^2 + x > 0$
et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Sur $[t_0; +\infty[$, le changement de variable $y = \varphi(t)$ est strictement croissant, de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que sa bijection réciproque.
$\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc de même nature que $\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{+\infty} \cos(y) \left(\varphi^{-1}\right)'(y)\,\mathrm{d}y$
On procède ensuite à une intégration par parties :
$u'(y) = \cos(y)$, $u(y) = \sin(y)$
$v(y) = \left(\varphi^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)} = \dfrac{1}{\left(\varphi^{-1}(y)\right)^2 + x}$ et on s'épargne le calcul de $v'(y)$.
$\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc pour la bijection réciproque :
$\varphi^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$
On en déduit $u(y)v(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ et l'intégrale de l'énoncé est de même nature que $\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{+\infty} \sin(y)v'(y)\,\mathrm{d}y$
Mais :
$\forall y \in [\varphi(t_0); +\infty[\; |\sin(y)v'(y)| \leq |v'(y)| = -v'(y)$
car v est décroissante car φ^{-1} étant croissante et positive, $y \mapsto \left(\varphi^{-1}(y)\right)^2 + x$ est croissante.
$\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{Y} |v'(y)|\,\mathrm{d}y = v(\varphi(t_0)) - v(Y) \xrightarrow[Y\to+\infty]{} v(\varphi(t_0))$ donc la fonction v' est intégrable sur $[\varphi(t_0); +\infty[$
On en déduit que la fonction $y \mapsto \sin(y)v'(y)$ intégrable sur $[\varphi(t_0); +\infty[$
Donc $\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{+\infty} \sin(y)v'(y)\,\mathrm{d}y$ converge absolument.
Donc $\displaystyle\int_{\varphi(t_0)}^{+\infty} \sin(y)v'(y)\,\mathrm{d}y$ converge.
Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)\mathrm{d}t$ converge.

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 10 *(X 2019)*

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(a+u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u \quad a > 0$$

- Calcul
- $\lim\limits_{a\to+\infty} I$

Correction

- Soit $f \begin{cases} [1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto \dfrac{\ln(a+u^2)}{u^2} \end{cases}$.
  f est continue.
  En $+\infty$, $\dfrac{\ln(a+u^2)}{u^2} \sim \dfrac{2\ln(u)}{u^2} = o\left(\dfrac{1}{u^{3/2}}\right)$
  Donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$

$$\text{IPP :}\quad u'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad u(x) = -\frac{1}{x}$$
$$v(x) = \ln\left(a + x^2\right) \qquad v'(x) = \frac{2x}{a + x^2}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$.
$u(x)v(x) = \dfrac{\ln(a + x^2)}{x} \sim \dfrac{2\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
L'IPP est justifiée.

$$\begin{aligned} I &= \ln(1 + a) + 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a + x^2} = \ln(1 + a) + 2\left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \ln(1 + a) + \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right) = \ln(1 + a) + \frac{2}{\sqrt{a}} \arctan(\sqrt{a}) \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{a \to +\infty} I = +\infty$

Exercice 11 *(Mines 2019)*

Soient $I =]0; +\infty[$ et $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}) \text{ tq } \forall s > 0\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u + s} \text{ est intégrable sur } I \right\}$.

Pour $f \in E$, on définit $\widehat{f} \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u + s}\,\mathrm{d}u \end{cases}$.

1. Soit $L = \{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}) \text{ intégrable sur } I \}$.
   Comparer L et E pour l'inclusion.
2. Soit $f_\alpha \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ u \mapsto u^{\alpha - 1} \end{cases}$.
   Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha \in E$.
   Montrer que $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α.
3. ?

Correction

1. - Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur I.
     Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
     $\forall u \in I \ \left|\dfrac{f(u)}{u + s}\right| = \dfrac{|f(u)|}{u + s} \leq \dfrac{|f(u)|}{s}$
     avec $\dfrac{|f|}{s}$ continue, à valeurs réelles positives et intégrable sur I.
     Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u + s} \end{cases}$ est intégrable sur I.
     On en déduit que $f \in E$.
     On a donc prouvé : $L \subset E$.
   - Soit $f \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{1}{u + 1} \end{cases}$
     — f est continue sur I.

— Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est intégrable sur $]0;1]$.
De plus :
$\forall u \in [1;+\infty[\ 0 \leq \dfrac{f(u)}{u+s} = \dfrac{1}{u+1}.\dfrac{1}{u+s} \leq \dfrac{1}{u^2}$
avec $\begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto \dfrac{1}{u^2} \end{cases}$ continue, positive et intégrable sur $[1;+\infty[$.
Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Donc la fonction $\begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ u \mapsto \dfrac{f(u)}{u+s} \end{cases}$ est intégrable sur I.

On a donc $f \in E$.

Par contre $f \notin L$:
$f(u) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u}$ donc f n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ ni a fortiori sur I.

Finalement L est strictement inclus dans E.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α est continue sur I.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{f_\alpha(u)}{u+s} \sim_0 \dfrac{1}{su^{1-\alpha}}$
$\dfrac{f_\alpha(u)}{u+s} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u^{2-\alpha}}$
On en déduit :
$F_\alpha \in E \iff 1-\alpha < 1$ et $2-\alpha > 1$
puis :
$$\boxed{f_\alpha \in E \iff \alpha \in]0;1[}$$
Soit $\alpha \in]0;1[$.
Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$.
Le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u = st$ donne :
$$\begin{aligned} \widehat{f_\alpha}(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{f_\alpha(u)}{u+s}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{s^{\alpha-1}u^{\alpha-1}}{s(1+u)} s\,\mathrm{d}u \\ &= s^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$
et finalement :
$$\boxed{\widehat{f_\alpha} = \widehat{f_\alpha}(1).f_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}dt\right).f_\alpha}$$

3. Cf Centrale PC1 1998

Exercice 12 *(Mines 2016)*

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

Correction
Soit $f\begin{cases}]a;b[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x\end{cases}$.
f est continue sur $]a;b[$.
Si a ou $b=0$, il y a un problème pour l'équivalent mais $f(x)=O_a\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}\right)$ et $f(x)=O_b\left(\dfrac{1}{\sqrt{b-x}}\right)$ donc f est intégrable sur $]a;b[$.

$$\begin{aligned}\forall x\in]a;b[\ (x-a)(b-x) &= -ab+(a+b)x-x^2\\ &= -ab+\frac{(a+b)^2}{4}-\left(x^2-(a+b)x+\frac{(a+b)^2}{4}\right)\\ &= \frac{(b-a)^2}{4}-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\left(1-\left(\frac{2}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)^2\right)\end{aligned}$$

On fait donc le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $t=\dfrac{2}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{b-a}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t+\frac{a+b}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a+b}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ par parité}\\ &= \frac{a+b}{2}\left[\arcsin t\right]_{-1}^1\\ &= \frac{\pi(a+b)}{2}\end{aligned}$$

Exercice 13 *(X 2016)*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Correction
Soit $f\begin{cases}]0;+\infty[\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\end{cases}$.
f est continue.
En $+\infty$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\sim\dfrac{1}{x^2}$
Donc f est intégrable sur $[1;+\infty[$
En 0, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\sim\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(car $1+\dfrac{1}{x^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$ et ce sont des infiniment grands)
Donc $f(x) \sim -2\ln x$.
Donc f est intégrable sur $]0;1]$.

$$\begin{array}{rlr} \text{IPP :} & u'(x) = 1 & u(x) = x \\ & v(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & v'(x) = -\dfrac{2}{x+x^3} \end{array}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(x)v(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \sim \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
$u(x)v(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \sim -2x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
L'IPP est justifiée.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left[\arctan(x)\right]_0^{+\infty} = \pi$

Exercice 14 *(Centrale 2012)*

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer qu'elle converge et la calculer.

Correction
Soit $f\begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2} \end{cases}$.
f est continue.
$f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1$
$\dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2} \sim_{1^-} \ln(1-t)$
Comme ln est intégrable sur $]0;1/2[$, par changement de variable ($x = 1-t$) $t \mapsto \ln(1-t)$ est intégrable sur $[1/2;1[$).
Donc f est intégrable sur $]0;1[$.

On fait une IPP :
$u(t) = \ln(1-t^2)$, $u'(t) = \dfrac{-2t}{1-t^2}$
$v'(t) = \dfrac{1}{t^2}$, $v(t) = \dfrac{-1}{t}$
u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ et :
$u(t)v(t) = -\dfrac{\ln(1-t^2)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$
Par contre $u(t)v(t) \xrightarrow[t\to 1]{} +\infty$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-h} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{\ln(1-(1-h)^2)}{1-h} - 2\int_0^{1-h} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= -\frac{\ln(2h-h^2)}{1-h} - \ln\left(\frac{1+1-h}{1-1+h}\right) \\
&= -\frac{1}{1-h}\left(\ln 2 + \ln h + \ln\left(1-\frac{h}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{2-h}{h}\right) \\
&= (-1+h+o(h))(\ln 2 + \ln h + o(1)) + \ln h - \ln 2 - \ln\left(1-\frac{h}{2}\right) \\
&= -\ln 2 - \ln h + o(1) + \ln h - \ln 2 = -2\ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2$$

Exercice 15 *(Mines 2021)*

Soit $\lambda > 0$.
Calculer (et montrer l'existence de) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

Correction
L'existence est facile à justifier :

- La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall t \in \mathbb{R}_+\ \left|\mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\right| = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)| \leq \mathrm{e}^{-\lambda t}$
  avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ $(\lambda > 0)$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus : $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda(u+k\pi)}\,|\sin(u+k\pi)|\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{e}^{-\lambda k\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u\right) \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\lambda u}\sin(u)\,\mathrm{d}u \times \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda\pi}\right)^k
\end{aligned}$$

On en déduit que $I = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\lambda u} \sin(u) \,\mathrm{d}u \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda\pi}\right)^k = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda\pi}} \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\lambda u} \sin(u) \,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\lambda u} \sin(u) \,\mathrm{d}u &= \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\lambda u} \mathrm{e}^{iu} \,\mathrm{d}u\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-\lambda)u}}{i-\lambda}\right]_0^\pi\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-\lambda\pi} - 1}{i-\lambda}\right) \\
&= \frac{1 + \mathrm{e}^{-\lambda\pi}}{1+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2.4 Fonctions intégrables

Exercice 16 *(X 2017)*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable et de dérivée bornée.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

Correction
Par hypothèse, il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+^*$ tq :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ |f'(x)| \leq M$
Soit F la primitive de f nulle en 0 :
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ F(x) = \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$.
Par hypothèse, $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Soit $\epsilon > 0$.
Soit $\epsilon_1 > 0$ à choisir plus tard.
$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0 \ |F(x) - l| \leq \epsilon_1$
On en déduit :
$\forall (x,y) \in [x_0; +\infty[^2 \ |F(x) - F(y)| = |F(x) - l + l - F(y)| \leq |F(x) - l| + |l - F(y)| \leq 2\epsilon_1$
Soit $x \geq x_0$ et $h > 0$ à choisir plus tard.
$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t) F''(t) \,\mathrm{d}t = F(x) + hf(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t) f(t) \,\mathrm{d}t$
On en déduit $f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) f(t) \,\mathrm{d}t$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) \,|f(t)| \,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{M}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) \,\mathrm{d}t = \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{M}{h} \left[-\frac{(x+h-t)^2}{2}\right]_x^{x+h} \\
&\leq \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{Mh}{2}
\end{aligned}$$

Soit $\phi \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \frac{2\epsilon_1}{h} + \frac{Mh}{2} \end{cases}$.
ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$\forall h > 0\ \phi'(h) = -\dfrac{2\epsilon_1}{h^2} + \dfrac{M}{2} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{M}{2}h^2 - 2\epsilon_1\right)$
Si on pose $h_0 = 2\sqrt{\dfrac{\epsilon_1}{M}}$, on a :

$$|f(x)| \quad \leq \quad \frac{2\epsilon_1}{2\sqrt{\dfrac{\epsilon_1}{M}}} + \frac{M2\sqrt{\dfrac{\epsilon_1}{M}}}{2} = 2\sqrt{\epsilon_1 M}$$

Si on prend $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon^2}{4M}$ alors, pour tout $x \geq x_0$, $|f(x)| \leq \epsilon$.
En revenant donc à la définition, on a prouvé $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2.5 Comportements asymptotiques

Exercice 17 *(Mines 2022)*

Limite et équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction

$$\begin{aligned}\forall x > 0\ \mathrm{e}^{x^2} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad &= \quad \mathrm{e}^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \quad \mathrm{e}^{x^2}\left(\left[\frac{1}{t}\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \text{ IPP facile à justifier} \\ &= \quad \frac{1}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\forall x > 0\ 0 \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
Donc $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$.
Finalement : $\mathrm{e}^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{2x}$.