DM 1
Mines 2014 PC 2
Extraits
Opérateurs de moyenne

A rendre le jeudi 25 septembre 2025

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.
On note $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_b^0$ l'ensemble des fonctions bornées appartenant à $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}_+^{0*}$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^0$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
On note $\|.\|$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}_b^0$: si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
Dans tout le problème, la fonction f est un élément de $\mathcal{C}^0$ et la fonction ω un élément de $\mathcal{C}_+^{0*}$.

1 L'opérateur de moyenne

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t} \int_0^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

1. Montrer que la formule (1) définit une fonction φ_ω continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle se prolonge continûment à $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_\omega(x)$.

   On notera encore φ_ω ce prolongement.

   On note A_ω l'application qui à f fait correspondre φ_ω.

2. Montrer que A_ω définit un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$; est-ce également un endomorphisme de $\mathcal{C}_b^0$?
3. Démontrer que A_ω est injectif.

   On dit que λ est une valeur propre de A_ω sur $\mathcal{C}_b^0$, s'il existe $u \in \mathcal{C}_b^0$ non identiquement nulle telle que $A_\omega(u) = \lambda u$. La fonction u est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

4. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'un vecteur propre u de A_ω.
5. Résoudre cette équation différentielle dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que sa solution ne peut se prolonger par continuité en 0 que si $\lambda \in]0;1]$.
6. Dans le cas où ω est intégrable sur $\mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des valeurs propres de A_ω et les sous-espaces propres associés (on pourra distinguer le cas $\lambda = 1$.)

2 Le cas périodique

On suppose désormais que ω est τ-périodique et que f est T-périodique, où τ et T sont des réels strictement positifs.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \omega(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
8. Montrer que ω admet un maximum et un minimum strictement positifs.

Périodes commensurables
On suppose dans ce paragraphe que $\dfrac{\tau}{T}$ est rationnel.

9. Déterminer $\theta > 0$ tel que pour tout x,

$$\omega(x+\theta) = \omega(x) \text{ et } f(x+\theta) = f(x)$$

On note E l'application partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, et pour $\theta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$E_\theta(x) = \theta\, E\left(\frac{x}{\theta}\right) \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

10. Représenter graphiquement la fonction E_θ pour $-2\theta \leq x \leq 3\theta$.
11. Déterminer $A_\omega(f) \circ E_\theta$ sur $[k\theta; (k+1)\theta[$ où $k \in \mathbb{Z}^*$. Démontrer que

$$\left(A_\omega(f) \circ E_\theta\right)(x) = A_\omega(f)(\theta)$$

pour $x \in [0;\theta[$.

12. Montrer que $\displaystyle\left|\int_{E_\theta(x)}^x f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \theta\,\|f\|\,\|\omega\|$
13. Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\left|\left(A_\omega(f) - A_\omega(f)\circ E_\theta\right)(x)\right| \leq \frac{\theta\,\|f\|\,\|\omega\|}{x \min \omega}\left(\frac{\|\omega\|}{\min \omega} + 1\right)$$

14. En déduire que $A_\omega(f) \in \mathcal{C}^0$ et possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et en donner une expression. Qu'en est-il lorsque x tend vers $-\infty$?

Périodes incommensurables
La fin du problème fait appel à la théorie des séries de Fourier qui n'est plus au programme.