# Analyse1
# Chapitre 1
# Correction du QCM

941

- **Question 1**

  La fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ?

  — **Réponse 1 :** Oui

  — **Réponse 2 :** Non

  **Correction**

  $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} x+2-\sqrt{x^2+4x+1} &= \frac{(x+2)^2-(x^2+4x+1)}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \\ &= \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim \frac{3}{2x} \end{aligned}$$

  Or $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ donc $f$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

  Finalement $f$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

  **Remarque**

  Comment obtenir un développement asymptotique plus complet ?

  Dans la racine, $x^2+4x+1 \sim x^2$ donc on factorise x$^2$ :

$$\sqrt{x^2+4x+1} = x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\begin{aligned} &= x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1/2\times(1/2-1)}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{1/2\times(1/2-1)(1/2-2)}{6}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= x+2-\frac{3}{2x}+\frac{3}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

  Donc $f(x) = \dfrac{3}{2x}-\dfrac{3}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

- **Question 2**

  La fonction $f\begin{cases}[1;+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}\end{cases}$ est-elle intégrable sur $[1;+\infty[$ ?

  — **Réponse 1 :** Oui

— **Réponse 2 :** Non

**Correction**

$f$ est continue sur $[1;+\infty[$.

$x^2 \mathrm{e}^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}} = \mathrm{e}^{2\ln x+\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}$

$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = o\left(x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}\right)$ et $\ln x = o\left(x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}\right)$ donc :

$2\ln x + \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x} \sim -\sqrt[3]{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

Donc $x^2 \mathrm{e}^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Donc $\mathrm{e}^{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Donc $f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.

- **Question 3**

La fonction $f \begin{cases} [2;+\infty[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[2;+\infty[$ ?

— **Réponse 1 :** Oui

— **Réponse 2 :** Non

**Correction**

$f$ est continue sur $[2;+\infty[$.

$\forall x \in [2;+\infty[\ 0 \leq (\ln x)^{-\ln x} = \mathrm{e}^{-\ln x\ \ln(\ln x)}$

$\forall x \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} (\geq 2)\ \ln(\ln x) \geq 2$

$\forall x \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}\ \ -2\ln x \geq -\ln x\ \ln(\ln x)$

Donc :

$\forall x \in [\mathrm{e}^{\mathrm{e}^2};+\infty[\ 0 \leq (\ln x)^{-\ln x} \leq \mathrm{e}^{-2\ln x} = \dfrac{1}{x^2}$

Donc $f$ est intégrable sur $[2;+\infty[$.

**Autre méthode**

$x^2 f(x) = \mathrm{e}^{2\ln(x) - \ln x\ \ln(\ln x)} = \mathrm{e}^{(2-\ln(\ln(x)))\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (à l'intérieur de l'exponentielle, ce n'est pas une forme indéterminée)

Donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Donc $f$ est intégrable sur $[2;+\infty[$.

- **Question 4**

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$ ?

— **Réponse 1 :** Oui

— **Réponse 2 :** Non

**Correction**

$f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (c'est du cours) et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$ (prolongeable par continuité) sont intégrables sur $]0;1]$ donc $f$ est intégrable sur $]0;1]$.

En $+\infty$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\left(1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)\\ &= O\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que $f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Finalement $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Question 5**

La fonction $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}}\end{cases}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$ ?

— **Réponse 1 :** Oui
— **Réponse 2 :** Non

**Correction**

$f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x\in[1;+\infty[\ |f(x)|\leq \dfrac{2}{x^{\frac{5}{3}}}$
donc $f$ est intégrable sur $[1;+\infty[$.
En 0 : $\sin 5x-\sin 3x = 5x-3x+o(x)\sim 2x$
$f(x)\sim_0 \dfrac{2}{x^{\frac{2}{3}}}$
$\dfrac{2}{3}<1$ donc $f$ est intégrable sur $]0;1]$.
Finalement $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Question 6**

Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\int_{1/x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$

Le domaine de définition de $f$ est :
— $\mathbb{R}^*$
— $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
— $]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$
— $]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$
— $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$

**Correction**

La bonne réponse est : $]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$.
$\forall t>-1\ 1+t^3>0$
$1+(-1)^3=0$
$\forall t<-1\ 1+t^3<0$
Si $x<-1$, alors $\left[\dfrac{1}{x};x^2\right]\subset]-1;+\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
Si $x=-1$, on a affaire à $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$ qui est impropre à gauche.
$1+t^3=(1+t)(1-t+t^2)\sim_{-1}3(1+t)$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}\sim_{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ donc la fonction

$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur$]-1;1]$ et $f(-1)$ est défini.

Si $x \in ]-1;0[$, on a $\dfrac{1}{x} < -1 < x^2$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $x = 0$, $f(x)$ n'est pas défini car $\dfrac{1}{x}$ ne l'est pas.

Enfin si $x > 0$ alors $\left[\dfrac{1}{x}; x^2\right] \subset ]0;+\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

**Remarque**

J'ai extrait cette question de l'exercice suivant :

1. $\forall t > -1 \; 1+t^3 > 0$
   $1+(-1)^3 = 0$
   $\forall t < -1 \; 1+t^3 < 0$
   Si $x < -1$, alors $\left[\dfrac{1}{x}; x^2\right] \subset ]-1;+\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
   Si $x = -1$, on a affaire à $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\, \mathrm{d}t$ qui est impropre à gauche.
   $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2) \sim_{-1} 3(1+t)$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{-1} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur$]-1;1]$ et $f(-1)$ est défini.
   Si $x \in ]-1;0[$, on a $\dfrac{1}{x} < -1 < x^2$ et $f(x)$ n'est pas défini.
   Si $x = 0$, $f(x)$ n'est pas défini car $\dfrac{1}{x}$ ne l'est pas.
   Enfin si $x > 0$ alors $\left[\dfrac{1}{x}; x^2\right] \subset ]0;+\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

   $\forall x < -1 \; f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} + \int_{0}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
   D'après le théorème fondamental du calcul différentiel intégral : $\displaystyle\int_{0}^{X} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow[X \to 0]{} 0$.
   Par composition des limites : $\displaystyle\int_{1/x}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -0 = 0$
   $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   On en déduit $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
   On montre de manière similaire :
   $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to -1 \\ x < -1}]{} \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = f(-1)$
   $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
   $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$

2. Si on note $F$ une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ définie sur $]-1;+\infty[$, on a :

$\forall x \in ]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\ f(x) = F(x^2) - F\left(\frac{1}{x}\right)$
Sous cette forme, $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;1[$ et on a vu dans la question précédente que $f$ est continue en $-1$.

3.

$$\begin{aligned}\forall x \in ]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\ f'(x) &= 2xF'(x^2) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{\sqrt{x(x^3+1)}}\end{aligned}$$

$\forall x > 0\ f'(x) > 0$
$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to-1\\x<-1}]{} +\infty$ donc la courbe aura une tangente verticale au point d'abscisse $-1$.

$$\begin{aligned}\forall x < -1\ f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x(x^3+1)}+\sqrt{1+x^6}}{\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\\ &= \frac{4x^3(x^3+1)-1-x^6}{(2x\sqrt{x(x^3+1)}-\sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\\ &\quad \text{avec } 2x\sqrt{x(x^3+1)}-\sqrt{1+x^6}<0\\ &= \frac{3x^6+4x^3-1}{(2x\sqrt{x(x^3+1)}-\sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\end{aligned}$$

On introduit alors le polynôme $P(X) = 3X^2 + 4X - 1$.
Ses racines sont $r_1 = \frac{-4-\sqrt{28}}{6} = -\frac{2+\sqrt{7}}{3} \simeq -1.55$ et $r_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3} > 0$.
$\forall x < -1\ f'(x) = \frac{3(x^3-r_1)(x^3-r_2)}{(2x\sqrt{x(x^3+1)}-\sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}$
On note $x_0 = \sqrt[3]{r_1} \simeq -1,16$.
$f$ est décroissante sur $]-\infty;x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0;-1]$.