TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 1
Normes, inégalités, convexité

941

1 Exemples de normes

Exercice 1

Soient : $E = \{f : [0;\pi] \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^2 \text{ tq } f(0) = f'(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:
$N(f) = \sup\limits_{x \in [0;\pi]} |f(x) + f''(x)|$
N est-elle une norme sur E ?

Exercice 2 *(Centrale)*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Peut-on trouver une norme N sur E telle que, pour tout $(A, B) \in E^2$, $N(AB) = N(BA)$?
2. Peut-on trouver une norme N sur E telle que, pour tout $(A, B) \in E^2$, A semblable à B implique $N(A) = N(B)$?
   Remarque :
   Cette question est réservée aux 5/2.

Exercice 3 *(Mines)*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère une partie non vide A de $\mathbb{R}$.
On pose, pour $P \in E$, $N(P) = \sup\limits_{x \in A} |P(x)|$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit à valeurs réelles.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit une norme sur E.

Exercice 4 *(Ens 2023)*

La première question sera vue ultérieurement dans le cours d'algèbre linéaire.

Exercice 5 *(Ens 2023)*

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.
   Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. On pose $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :
   $\|x + y\|_1 + \|x - y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1) \iff \forall i \in \{1; \ldots; n\}\ x_i y_i = 0$
3. Déterminer les applications linéaires f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$

1.1 Parties, suites et fonctions bornées

Exercice 6 *(X 2014)*

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i|$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_\infty = 1} (\|A\,X\|_\infty) = \max\limits_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ (ENS PSI 2024)
2. On considère cette fois-ci : $\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_1 = 1} (\|A\,X\|_1) = \max\limits_{j \in [\![1;n]\!]} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$

2 Inégalités avec des normes

Exercice 7 *(Ens 2023)*

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et :
$\forall n \geq 2\ P_n = 2XP_{n-1} - P_{n-2}$

1. (a) Montrer que P_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?
   (b) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \dfrac{P_n}{2^{n-1}}$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \|p_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in [-1;1]} (|p_n(x)|) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
3. Soient $y_1, \ldots, y_n \in [-1;1]$ deux à deux distincts et $T = (X - y_1)\ldots(X - y_n)$.
   Montrer que $\|p_n\|_\infty \leq \|T\|_\infty$
4. Conclure concernant $\inf\limits_{y_1,\ldots,y_n \text{ 2 à 2 distincts dans } [-1;1]} \|(X - y_1)\ldots(X - y_n)\|_\infty$.

3 Fonctions convexes

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convexe et bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $g : x \mapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est convexe si, et seulement si, g est convexe.

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Montrer :
f convexe $\Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \forall r \geq 0\ \displaystyle\int_{a-r}^{a+r} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 2rf(a)$