TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 1
Normes, inégalités, convexité
Correction

941

1 Exemples de normes

Exercice 1

Soient : $E = \{f : [0;\pi] \to \mathbb{R}\ \mathcal{C}^2 \text{ tq } f(0) = f'(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:
$N(f) = \sup\limits_{x\in[0;\pi]} |f(x) + f''(x)|$
N est-elle une norme sur E ?

Correction

— Pour tout $f \in E$, $|f + f''|$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc elle y est bornée et atteint ses bornes. Donc $N(f) = \sup\limits_{x\in[0;\pi]} |f(x) + f''(x)| = \max\limits_{x\in[0;\pi]} |f(x) + f''(x)|$ est bien définie et appartient à $\mathbb{R}_+$.

—

$$\begin{aligned}
\forall f \in E\ \forall\lambda \in \mathbb{R}\ N(\lambda f) &= \sup_{x\in[0;\pi]} |\lambda f(x) + (\lambda f)''(x)| = \sup_{x\in[0;\pi]} |\lambda f(x) + \lambda f''(x)| \\
&= \sup_{x\in[0;\pi]} |\lambda(f(x) + f''(x))| = \sup_{x\in[0;\pi]} (|\lambda|\, |f(x) + f''(x)|) \\
&= |\lambda| \sup_{x\in[0;\pi]} |f(x) + f''(x)| \text{ car } |\lambda| \geq 0 \\
&= |\lambda|\ N(f)
\end{aligned}$$

— Soit $f \in E$ tq $N(f) = 0$.
$\forall x \in [0;\pi]\ f(x) + f''(x) = 0$
Donc :
$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0;\pi]\ f(x) = A\cos x + B\sin x$
$f \in E$ donc $f(0) = f'(0) = 0$. On en déduit $A = B = 0$ et donc $f = 0$.

— Soit $(f, g) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;\pi]\ |(f+g)(x) + (f+g)''(x)| &= |f(x) + g(x) + f''(x) + g''(x)| \\
&\leq |f(x) + f''(x)| + |g(x) + g''(x)| \\
&\leq N(f) + N(g) \text{ indépendant de } x
\end{aligned}$$

Donc $N(f+g) = \sup\limits_{x\in[0;\pi]} |(f+g)(x) + (f+g)''(x)| \leq N(f) + N(g)$

Exercice 2 *(Centrale)*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Peut-on trouver une norme N sur E telle que, pour tout $(A, B) \in E^2$, $N(AB) = N(BA)$?
2. Peut-on trouver une norme N sur E telle que, pour tout $(A, B) \in E^2$, A semblable à B implique $N(A) = N(B)$?
   Remarque :
   Cette question est réservée aux 5/2.

Correction

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Donc $N(AB) = 0$ et $N(BA) \neq 0$.
   Donc la réponse est NON.
   On peut aller plus loin :
   Si $n = 1$, le produit est commutatif donc toutes les normes conviennent.
   Pour $n \geq 3$, la réponse est non car on peut trouver deux matrices A_n et B_n telles que $A_nB_n \neq B_nA_n$.
   Il suffit de définir ces deux matrices par blocs : $A_n = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soient $A_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \neq 0$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   A_ϵ et B sont semblables :
   si $B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u)$ alors $A_\epsilon = \mathrm{Mat}_{(e_1,\epsilon e_2)}(u)$.
   $A_\epsilon \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $N(A_\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.
   Or $N(B) \neq 0$ donc la réponse est NON.

   Autre méthode
   On suppose qu'il existe une norme N sur E telle que, pour tout $(A, B) \in E^2$, A semblable à B implique $N(A) = N(B)$.
   $\forall A \in E\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K})\ PA = P.(AP).P^{-1}$
   Donc :
   $\forall A \in E\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K})\ N(PA) = N(AP)$
   et puisque toute matrice carrée est la limite d'une suite de matrices inversibles :
   $\forall (A, B) \in E^2\ N(AB) = N(BA)$: absurde.

Exercice 3 *(Mines)*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère une partie non vide A de $\mathbb{R}$.
On pose, pour $P \in E$, $N(P) = \sup\limits_{x \in A} |P(x)|$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit à valeurs réelles.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit une norme sur E.

Correction

1. Si N est à valeurs réelles, on a :
   $N(X) = \sup\limits_{x \in A} |x| \in \mathbb{R}$ donc A est bornée.
   Réciproquement, on suppose A bornée.
   $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in A \ \ |x| \leq M$
   Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.
   (je ne suppose pas $a_n \neq 0$ ce qui évite de distinguer le cas $P = 0$).
   $\forall x \in A \ \ |P(x)| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \, |x|^k \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \, M^k \in \mathbb{R}$
   Donc $\sup\limits_{x \in A} |P(x)| \in \mathbb{R}$

   Finalement :
   N est à valeurs réelles $\iff A$ bornée
2. On suppose que N est une norme sur E.
   N est à valeurs réelles donc A est bornée.
   Supposons A finie : $A = \{x_1; \ldots; x_n\}$ ($A \neq \emptyset$ par hypothèse)
   $N\left((X - x_1) \ldots (X - x_n)\right) = 0$ avec $(X - x_1) \ldots (X - x_n) \neq 0$
   C'est absurde donc A est infinie.

   Réciproquement soit A une partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$.
   D'après 1., N est à valeurs réelles.
   $\forall P \in \mathbb{R}[X] \ N(P) = \sup\limits_{x \in A} \left(|P(x)| \geq 0\right) \geq 0$
   De plus :

$$\begin{aligned} N(P) = 0 &\iff \forall x \in A \ \ |P(x)| = 0 \\ &\iff \forall x \in A \ P(x) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } A \text{ est infinie} \end{aligned}$$

   De plus :

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{R}[X] \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ N(\lambda P) &= \sup_{x \in A} \left(|\lambda P(x)|\right) = \sup_{x \in A} \left(|\lambda| |P(x)|\right) \\ &= |\lambda| \sup_{x \in A} \left(|P(x)|\right) \ \text{ car } \ |\lambda| \in \mathbb{R}_+ \\ &= |\lambda| \, N(P) \end{aligned}$$

   Enfin soit P et $Q \in \mathbb{R}[X]$.
   $\forall x \in A \ \ |P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq N(P) + N(Q)$ indépendant de x.
   Donc $N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$.
   Finalement :
   N est une norme sur $\mathbb{R}[X] \iff A$ est infinie et bornée

Exercice 4 *(Ens 2023)*

Exercice 5 *(Ens 2023)*

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.
   Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

2. On pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
   Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :
   $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i y_i = 0$
3. Déterminer les applications linéaires f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telles que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ \|f(x)\|_1 = \|x\|_1$

Correction

1. Cette question a été traitée en cours.
   Voici une autre méthode.
   On commence par remarquer que la conservation du produit scalaire entraîne la conservation de la norme.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   $$\begin{aligned} & \|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2 \\ = \ & \|f(\lambda x + \mu y)\|^2 + \lambda^2 \|f(x)\|^2 + \mu^2 \|f(y)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda x + \mu y \mid f(x)) \\ & -2\mu(f(\lambda x + \mu y \mid f(y)) + 2\lambda\mu(f(x) \mid f(y)) \\ = \ & \|\lambda x + \mu y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + \mu^2 \|y\|^2 - 2\lambda(\lambda x + \mu y \mid x) \\ & -2\mu(\lambda x + \mu y \mid y) + 2\lambda\mu(x \mid y) \\ = \ & \|\lambda x + \mu y - \lambda x - \mu y\|^2 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$
   Donc f est une application linéaire. Comme elle conserve le produit scalaire, c'est un automorphisme orthogonal.
2. Supposons $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)$.
   On a $\|x\|_1 + \|y\|_1 - \|x+y\|_1 + \|x\|_1 + \|y\|_1 - \|x-y\|_1 = 0$.
   Mais avec l'inégalité triangulaire : $\|x+y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1$ et $\|x-y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1$ donc :
   $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ et $\|x-y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$.
   On a donc :$\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i| - |x_i + y_i|) = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i| - |x_i - y_i|) = 0$
   Mais avec l'inégalité triangulaire :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |x_i| + |y_i| - |x_i + y_i| \ge 0$ et $|x_i| + |y_i| - |x_i - y_i| \ge 0$
   Donc :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$ et $|x_i - y_i| = |x_i| + |y_i|$
   Donc :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |x_i + y_i| = |x_i - y_i|$
   Elevé au carré cela donne :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ (x_i + y_i)^2 = (x_i - y_i)^2$
   En développant, on a :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i$
   et finalement :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i y_i = 0$

   Réciproquement, on suppose :
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i y_i = 0$
   Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

$x_iy_i = 0$ donc $x_i = 0$ ou $y_i = 0$.
Si $x_i = 0$ alors $|x_i + y_i| = |y_i| = |x_i| + |y_i|$ et $|x_i - y_i| = |-y_i| = |x_i| + |y_i|$.
Si $y_i = 0$ alors $|x_i + y_i| = |x_i| = |x_i| + |y_i|$ et $|x_i - y_i| = |x_i| = |x_i| + |y_i|$.
Donc :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ \ |x_i + y_i| + |x_i - y_i| = 2\,|x_i| + 2\,|y_i|$
En sommant, on obtient : $\|x+y\|_1 + \|x-y\|_1 = 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)$.

3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui conserve la norme $\|.\|_1$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $x_iy_i = 0$.

$$\begin{aligned}
\|f(x)+f(y)\|_1 + \|f(x)-f(y)\|_1 &= \|f(x+y)\|_1 + \|f(x-y)\|_1 \text{ car on suppose } f \text{ linéaire}\\
&= \|x+y\|_1 + \|x-y\|_1\\
&= 2(\|x\|_1 + \|y\|_1)\\
&= 2(\|f(x)\|_1 + \|f(y)\|_1)
\end{aligned}$$

Si on prend pour x et y les vecteurs de la base canonique, on a :
$\forall (i,k,l) \in [\![1;n]\!]^3$ avec $k \neq l$, $m_{i,k}m_{i,l} = 0$
Sur chaque ligne, il y a au plus un coefficient non nul.
Mais f est bijective : à cause de la conservation de la norme, son noyau est réduit à $\{0\}$.
Donc sur chaque ligne, il y a un et seul coefficient non nul.
On peut donc définir $\sigma \begin{cases} [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!] \\ i \mapsto j \text{ tq } a_{i,j} \text{ est l'unique coefficient non nul de la } i\text{-ème ligne de } \mathrm{Mat}_{Can}(f) \end{cases}$.
f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ donc chaque colonne contient au moins un coefficient non nul. On en déduit que σ est surjective puis que σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$.
f est donc de la forme $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (a_1x_{\sigma(1)},\dots,a_nx_{\sigma(n)})$.
En écrivant $\|f(e_j)\|_1 = \|e_j\|_1$, on obtient $\left|a_{\sigma^{-1}(j)}\right| = 1$.
Finalement, f est de la forme $\begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (\pm x_{\sigma(1)},\dots,\pm x_{\sigma(n)}) \end{cases}$ où σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$.
La réciproque est triviale.
Il y a donc $2^n n!$ endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui conservent la norme $\|.\|_1$.

1.1 Parties, suites et fonctions bornées

Exercice 6 *(X 2014)*

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]} |x_i|$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_\infty = 1} (\|A\,X\|_\infty) = \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$

2. On considère cette fois-ci : $\|X\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
Montrer : $\sup\limits_{\|X\|_1 = 1} (\|A\,X\|_1) = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$

Correction

1. On note $M_A = \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_\infty = 1$.

$$\begin{array}{rcl}
\|A\,X\|_\infty & = & \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j\right|\right) \\
& \leq & \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}\,x_j|\right) \\
& \leq & \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\;|x_j|\right) \\
& \leq & \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\;\|X\|_\infty\right) \\
& \leq & \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \text{ car } \|X\|_\infty = 1 \\
& \leq & M_A
\end{array}$$

   De plus, il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}| = M_A$.

   Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $x_j = 1$ si $a_{i_0,j} \geq 0$, -1 sinon.

   $\|X_0\|_\infty = 1$ et :

   $M_A \geq \|A\,X_0\|_\infty \geq \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,x_j\right| = \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}| = M_A$

   On a donc établi :

   i Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\|_\infty = 1$, $\|A\,X\|_\infty \leq M_A$

   ii Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X_0\|_\infty = 1$ et $\|A\,X_0\|_\infty = M_A$

   D'où le résultat et plus précisément :

   $\max\limits_{\|X\|_\infty=1}(\|A\,X\|_\infty) = \max\limits_{i\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$

2. On note $N_A = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\|A\,X\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (|x_j|\ N_A) = N_A \sum_{j=1}^{n} |x_j| = N_A
\end{aligned}$$

De plus, il existe $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = N_A$.
Soit X_0 le vecteur d'indice j_0 de la base canonique.
$A\,X_0 = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix}$ donc $\|X_0\|_1 = 1$ et $\|A\,X_0\|_1 = N_A$.
On conclut comme dans le premier cas.

1.2 Inégalités avec des normes

Exercice 7 *(Ens 2023)*

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et :
$\forall n \geq 2\ P_n = 2X\,P_{n-1} - P_{n-2}$

1. (a) Montrer que P_n est de degré n. Quel est son coefficient dominant ?
   (b) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \dfrac{P_n}{2^{n-1}}$.
   Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \|p_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1;1]} (|p_n(x)|) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
3. Soient $y_1, \ldots, y_n \in [-1;1]$ deux à deux distincts et $T = (X - y_1)\ldots(X - y_n)$.
   Montrer que $\|p_n\|_\infty \leq \|T\|_\infty$
4. Conclure concernant $\inf\limits_{y_1,\ldots,y_n \text{ 2 à 2 distincts dans } [-1;1]} \|(X - y_1)\ldots(X - y_n)\|_\infty$.

Correction

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: P_n est degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
   $P_1 = X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$P_2 = 2X^2 - 1$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k compris entre 1 et n ($n \geq 2$).
$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$
XP_n est de degré $n+1$ et P_{n-1} est de degré $n-1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$.
De plus le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de $2XP_n$ ie $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$
$\forall x \in [-1;1]\ \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1 = P_0(x)$
$\forall x \in [-1;1]\ \cos(1 \times \arccos(x)) = x = P_1(x)$
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k compris entre 0 et n ($n \in \mathbb{N}^*$).
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
Donc :
$\forall x \in [-1;1]\ \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) = 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x))$
Donc :
$\forall x \in [-1;1]\ \cos((n+1)\arccos(x)) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) = P_{n+1}(x)$
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Remarques

— On peut s'en sortir avec des formules de trigonométrie plus élémentaire :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) = \cos(n \arccos(x))$
$\forall x \in [-1;1]\ \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1 = P_0(x)$
$\forall x \in [-1;1]\ \cos(1 \times \arccos(x)) = x = P_1(x)$
On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout k compris entre 0 et n ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\begin{aligned} & \forall x \in [-1;1]\ \cos((n+1)\arccos(x)) = \\ = \ & \cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \\ = \ & xP_n(x) - \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \end{aligned}$$

$\sin(\arccos(x))$ est facile à calculer :
$\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$ donc :
$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$
Or $\arccos(x) \in [0;\pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geq 0$.
On en déduit : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
Par contre, $\sin(n\arccos(x))$ est difficile à calculer. Pour l'éliminer, on calcule :

$$\begin{aligned} & \forall x \in [-1;1]\ \cos((n-1)\arccos(x)) = \\ = \ & \cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) + \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \\ = \ & xP_n(x) + \sin(n\arccos(x))\sin(\arccos(x)) \end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall x \in [-1;1]\ \cos((n-1)\arccos(x)) + \cos((n+1)\arccos(x)) = 2xP_n(x)$
Donc :
$\forall x \in [-1;1]\ \cos((n+1)\arccos(x)) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) = P_{n+1}(x)$

— On peut procéder différemment.
Soit $x \in [-1;1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire à deux pas :

$u_{n+2} - 2xu_{n+1} + u_n = 0$
L'équation caractéristique est $r^2 - 2xr + 1 = 0$ ou encore $(r-x)^2 + 1 - x^2 = 0$.
On suppose désormais $x \in]-1;1[$.
L'équation caractéristique a deux racines complexes (non réelles) conjuguées : $x - i\sqrt{1-x^2}$ et $x + i\sqrt{1-x^2}$.
$x + i\sqrt{1-x^2}$ est de module $x^2 + \sqrt{1-x^2}^2 = 1$ et de partie imaginaire positive donc il existe $\theta \in]0;\pi[$ tel que $x + i\sqrt{1-x^2} = \mathrm{e}^{i\theta}$
$\cos(\theta) = x$ avec $\theta \in [0;\pi]$ donc $\theta = \arccos(x)$.
Il existe donc deux constantes A et B telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = A\cos(n\arccos(x)) + B\sin(n\arccos(x))$
$n = 0$ donne $A = u_0 = 1$
$n = 1$ donne $x = A\cos(\arccos(x)) + B\sin(\arccos(x)) = x + B\sin(\arccos(x))$
$\arccos(x) \in]0;\pi[$ donc $\sin(\arccos(x)) > 0$ et $B = 0$.
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ P_n(x) = u_n = \cos(n\arccos(x))$
On a donc prouvé :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-1;1[\ P_n(x) = \cos(n\arccos(x))$
Par continuité, on en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) = \cos(n\arccos(x))$

2. p_n est unitaire, ce qui va être utile pour la suite mais dans cette question, il s'agit de prouver que $\|P_n\|_\infty = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $x \in [-1;1]$.
$|P_n(x)| = |\cos(n\arccos(x))| \leq 1$
De plus :
$|P_n(1)| = |\cos(n\arccos(1))| = |\cos(n \times 0)| = 1$
Donc $\|P_n\|_\infty = 1$

3. On raisonne par l'absurde.
On suppose $\|T\|_\infty < \|p_n\|_\infty$.
On s'intéresse aux $x \in [-1;1]$ tels que $|p_n(x)| = \|p_n\|_\infty$ (cette indication a été fournie par l'examinateur mais quand ?)
Cela revient à chercher les $x \in [-1;1]$ tels que $\cos(n\arccos(x)) = \pm 1$ ou encore les $x \in [-1;1]$ tels que $n\arccos(x) \in \pi\mathbb{Z}$
On pose donc pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
La fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc $-1 = x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x_0 = 1$.
$\forall k \in [\![0;n]\!]\ (p_n - T)(x_k) = p_n(x_k) - T(x_k)$
Mais $|T(x_k)| \leq \|T\|_\infty < \|p_n\|_\infty$ et $|p_n(k)| = \|p_n\|_\infty$ donc $(p_n - T)(x_k)$ a le signe de $p_n(x_k)$.

$$\begin{aligned} p_n(x_k) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos(x_k)) \text{ car } x_k \in [-1;1] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) \text{ car } \frac{k\pi}{n} \in [0;\pi] \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$(p_n - T)(x_k)$ a donc le signe de $(-1)^k$. On met ainsi en évidence n changement de signe (strict) du polynôme $p_n - T$. $p_n - T$ a donc au moins n racines.

Mais p_n et T sont unitaires de degré n donc $p_n - T$ est de degré au plus $n-1$.
On en déduit que $p_n - T = 0$ ie $p_n = T$, ce qui contredit l'hypothèse $\|p_n\| > \|T\|_\infty$
On a donc prouvé :
$\|T\|_\infty \geq \|p_n\|_\infty$.

4. Le polynôme p_n est scindé à racines simples toutes dans $[-1;1]$.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ soit $y_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ 0 < \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} < \pi$
Donc les y_k sont n nombres deux à deux distincts dans $]-1;1[$.

$$\begin{array}{rcl} p_n(y_k) & = & \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos\left(y_k\right)\right) \text{ car } y_k \in [-1;1] \\ & = & \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ car } \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0;\pi] \\ & = & 0 \end{array}$$

On a mis en évidence n racines deux à deux distinctes de p_n unitaire de degré n donc on a toutes les racines de p_n qui est scindé à racines simples toutes dans $]-1;1[$.
Donc l'inf évoqué dans l'énoncé est en fait un minimum et vaut $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

2 Fonctions convexes

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ convexe et bornée.
Montrer que f est constante.

Correction
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.
f est convexe donc :
$\forall t \in \mathbb{R}\ f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$
Si $f'(t_0) > 0$ alors $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.
C'est absurde car on a supposé f bornée.
Donc $f'(t_0) \leq 0$.
Si $f'(t_0) < 0$ alors $f(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} +\infty$.
C'est absurde car on a supposé f bornée.
Donc $f'(t_0) = 0$.
On a donc prouvé :
$\forall t \in \mathbb{R}\ f'(t) = 0$
On en déduit que f est constante.

Remarque
L'exercice est juste sans l'hypothèse f bornée mais la solution est plus complexe et plus longue.
Supposons f convexe et bornée.

Soit $g = f - f(0)$.

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0;1]\ g((1-t)x+ty) & = & f((1-t)x+ty) - f(0) \\ & \leq & (1-t)f(x) + tf(y) - ((1-t)+t)f(0) \\ & \leq & (1-t)(f(x)-f(0)) + t(f(y)-f(0)) = (1-t)g(x) + tg(y)\end{array}$$

g est donc convexe et bornée.
Soit x et y deux réels tels que $0 < x < y$
$x = \dfrac{x}{y}y + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)0$ avec $\dfrac{x}{y} \in [0;1]$
On en déduit $g(x) \leq \dfrac{x}{y}g(y) + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)g(0) = \dfrac{x}{y}g(y)$
Donc $g(y) \geq y\dfrac{g(x)}{x}$
Si $g(x) > 0$ alors $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$: c'est absurde.
Donc :
$\forall x \geq 0\ g(x) \leq 0$
Soient x et y deux réels tels que $y < x < 0$.
$x = \dfrac{x}{y}y + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)0$ avec $\dfrac{x}{y} \in [0;1]$
On en déduit $g(x) \leq \dfrac{x}{y}g(y) + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)g(0) = \dfrac{x}{y}g(y)$
Donc $g(y) \geq y\dfrac{g(x)}{x}$
Si $g(x) < 0$ alors $g(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} +\infty$: c'est absurde.
Donc :
$\forall x \leq 0\ g(x) \geq 0$
Soit $h \begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(-x)\end{cases}$
h est bornée et convexe :

$$\begin{array}{rcl}\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0;1]\ h((1-t)x+ty) & = & g\left(-\left((1-t)x+ty\right)\right) = g\left((1-t)(-x)+t(-y)\right) \\ & \leq & (1-t)g(-x) + tg(-y) = (1-t)h(x) + th(y)\end{array}$$

D'après ce qui précède :
$\forall x \geq 0\ g(-x) = h(x) \leq 0$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_-\ g(x) \leq 0$
De même :
$\forall x \leq 0\ g(-x) = h(x) \geq 0$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+\ g(x) \geq 0$
D'où g nulle sur $\mathbb{R}$ et $f = f(0)$ est constante.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $g : x \mapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est convexe si, et seulement si, g est convexe.

Correction

g est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g'(x) &= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) \\
g''(x) &= -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^3} f''\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
f \text{ convexe} &\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f''(x) \geq 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f''\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \text{ car } \frac{1}{x} \text{ décrit } \mathbb{R}_+^* \text{ quand } x \text{ décrit } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; g''(x) \geq 0 \\
&\iff g \text{ convexe}
\end{aligned}$$

La propriété de l'énoncé est vraie avec f seulement supposée convexe mais la solution est plus complexe :

On suppose f convexe.

Soient x et y deux réels tq $0 < x < y$ et $t \in]0,1[$ (les cas$x = y$ ou $t = 0$ ou 1 sont clairs).

On a : $0 < x < (1-t)x + ty < y$

Donc $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{(1-t)x+ty} < \frac{1}{x}$

Donc $\frac{1}{(1-t)x+ty} = (1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y}$ avec $s \in]0;1[$.

$s = \frac{ty}{(1-t)x+ty}$ (calcul trivial)

$$\begin{aligned}
g((1-t)x+ty) &= ((1-t)x+ty) f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right) \\
&= ((1-t)x+ty) f\left((1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y}\right) \\
&\leq ((1-t)x+ty)\left((1-s) f\left(\frac{1}{x}\right) + s f\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\
&\leq (1-t)x f\left(\frac{1}{x}\right) + ty f\left(\frac{1}{y}\right) \\
&\leq (1-t)g(x) + tg(y)
\end{aligned}$$

Donc g est convexe.

Réciproquement on suppose g convexe.

$\forall x > 0 \; xg\left(\frac{1}{x}\right) = x.\frac{1}{x} f(x) = f(x)$

Donc, d'après ce qui précède, f est convexe.

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Montrer :
f convexe $\Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \forall r \geq 0\ \displaystyle\int_{a-r}^{a+r} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 2rf(a)$

Correction

— $\Longrightarrow$

f est convexe donc :
$\forall (a,t) \in \mathbb{R}^2\ f(t) \geq f(a) + f'(a)(t-a)$
On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall (a,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\ \int_{a-r}^{a+r} f(t)\,\mathrm{d}t &\geq \int_{a-r}^{a+r} \left(f(a) + f'(a)(t-a)\right)\,\mathrm{d}t\\ &\geq 2rf(a) + f'(a)\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_{a-r}^{a+r}\\ &\geq 2rf(a)\end{aligned}$$

— $\Longleftarrow$

Soit F une primitive de f.

$$\begin{aligned}\int_{a-r}^{a+r} f(t)\,\mathrm{d}t &= F(a+r) - F(a-r)\\ &= F(a) + rf(a) + \frac{r^2}{2}f'(a) + \frac{r^3}{6}f''(a) - \left(F(a) - rf(a) + \frac{r^2}{2}f'(a) - \frac{r^3}{6}f''(a)\right) + o(r^3)\\ &= 2rf(a) + \frac{r^3}{3}f''(a) + o(r^3)\end{aligned}$$

Donc $f''(a) = \displaystyle\lim_{r\to 0^+}\left(\frac{F(a+r)-F(a-r)-2rf(a)}{r^3/3}\right)$.
$f''(a)$ est la limite d'une quantité positive donc $f''(a) \geq 0$.
Comme c'est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, f est convexe.

Autre méthode

On raisonne par l'absurde : on suppose que f n'est pas convexe.
$\exists a \in \mathbb{R}$ tq $f''(a) < 0$.
Par continuité de f'' :
$\exists r > 0$ tq $\forall t \in [a-r; a+r]\ f''(t) < 0$
f' est donc strictement décroissante sur $[a-r; a+r]$.
Soit $t \in]a; a+r]$.
Par les accroissements finis :
$\exists s \in]a; t[$ tq $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(s) < f'(a)$
On en déduit $f(t) < f(a) + f'(a)(t-a)$
Soit $t \in [a-r; a[$.
Par les accroissements finis :
$\exists s \in]t; a[$ tq $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(s) > f'(a)$
On en déduit $f(t) < f(a) + f'(a)(t-a)$
$\forall t \in [a-r; a+r] \setminus \{a\}\ f(t) < f(a) + (t-a)f'(a)$
On en déduit :

$$\int_{a-r}^{a+r} f(t)\,\mathrm{d}t < \int_{a-r}^{a+r} \left(f(a) + f'(a)(t-a)\right)\,\mathrm{d}t = 2rf(a)$$

C'est absurde.