

ANALYSE 2
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 1 :
Normes, inégalités, convexité

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

1 Normes sur un $\mathbb{K}$ ev

1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ ev.

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in E \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- $\forall x \in E \ N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x, y) \in E^2 \ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On appelle $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé (en abrégé $\mathbb{K}$ evn) tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$ ev et N une norme sur E .

N est souvent notée $\|\cdot\|$ et $N(x)$ est noté $\|x\|$.

1.2 Exemples

- Si E est un espace préhilbertien réel, la norme euclidienne est une norme sur E .

Cas particuliers

$$\text{--- } \|\cdot\|_2 \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{pour } n = 1 \text{ il s'agit de la valeur absolue } |\cdot|)$$

$$\text{--- } \|\cdot\|_2 \text{ ou } N_2 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \left(\int_{[a; b]} f^2 \right)^{1/2} \end{cases}$$

Remarque

$$\|\cdot\|_2 \begin{cases} \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{pour } n = 1 \text{ il s'agit du module } |\cdot|) \text{ est une norme.}$$

Démonstration

- On a bien :
 $\forall z \in \mathbb{C}^n \quad \|z\|_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \quad \|\lambda z\|_2 &= \|(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n)\|_2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda z_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^2 |z_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= |\lambda| \|z\|_2 \end{aligned}$$

- On a trivialement $\|0_{\mathbb{C}^n}\|_2 = 0$ mais il n'est pas indispensable de l'écrire car dès qu'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

on a :

$$N(0_E) = N(0_{\mathbb{K}} 0_E) = |0_{\mathbb{K}}| N(0_E) = 0_{\mathbb{R}}$$

Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|z\|_2 = 0$.

$$\sum_{i=1}^n (|z_i|^2 \geq 0) = 0 \text{ donc :}$$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |z_i|^2 = 0$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_i = 0$ ie $z = 0$

- Soient $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.

Pour tout i compris entre 1 et n soient :

- a_i la partie réelle de u_i
- b_i la partie imaginaire de u_i
- c_i la partie réelle de v_i
- d_i la partie imaginaire de v_i

$$\begin{aligned} \|u + v\|_2 &= \|(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n ((a_i + c_i)^2 + (b_i + d_i)^2) \right)^{1/2} \\ &= N_2((a_1 + c_1, b_1 + d_1, a_2 + c_2, b_2 + d_2, \dots, b_n + d_n)) \\ &= N_2((a_1, b_1, \dots) + (c_1, d_1, \dots)) \\ &\quad \text{où } N_2 \text{ est la norme euclidienne canonique sur } \mathbb{R}^{2n} \\ &\leq N_2((a_1, b_1, \dots)) + N_2((c_1, d_1, \dots)) \\ &= \|u\|_2 + \|v\|_2 \end{aligned}$$

- $\|\cdot\|_1 \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \end{array} \right.$ est une norme.

Démonstration

- On a bien :
 $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \geq 0$

—

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \| \lambda x \|_1 &= \| (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \|_1 \\
&= \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| \\
&= |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| \|x\|_1
\end{aligned}$$

— Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_1 = 0$.

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| \geq 0) = 0 \text{ donc :}$$

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |x_i| = 0$$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = 0$ ie $x = 0$

— Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_1 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1
\end{aligned}$$

On montre de même que :

$$— \|\cdot\|_1 \begin{cases} \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |z_i| \end{cases}$$

$$— \|\cdot\|_1 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \int_{[a; b]} |f| \end{cases}$$

$$— \|\cdot\|_1 \begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \int_{[a; b]} |f| \end{cases}$$

sont des normes.

$$\bullet \|\cdot\|_\infty \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{cases} \text{ est une norme.}$$

Démonstration

— On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty \geq 0$$

—

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \| \lambda x \|_\infty &= \| (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \|_\infty \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda| |x_i|) \\
&= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \text{ car } |\lambda| \geq 0 \\
&= |\lambda| \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

Il est indispensable de préciser car $|\lambda| \geq 0$:

Si $\mu \leq 0$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} (\mu |x_i|) = \mu \min_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$.

— Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\iff \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i| \in \mathbb{R}_+) = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |x_i| = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

— Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |x_i + y_i| &\leq |x_i| + |y_i| \\ &\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \text{ indépendant de } i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i + y_i|) \\ &\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

On montre de même que les applications suivantes sont des normes :

$$\begin{aligned} \text{— } \|\cdot\|_\infty &\begin{cases} \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \end{cases} \\ \text{— } \|\cdot\|_\infty &\begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \max_{x \in [a; b]} |f(x)| \end{cases} \quad (\text{bien définie : cf le cours de SUP}). \end{aligned}$$

Plus généralement si X est un ensemble non vide et si on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -ev des

applications bornées de X dans $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|_\infty \begin{cases} \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)| \end{cases}$ est une norme.

Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles bornées.

$$\text{— } \|\cdot\|_\infty \begin{cases} \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \max_{x \in [a; b]} |f(x)| \end{cases}$$

Plus généralement si X est un ensemble non vide et si on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -ev des

applications bornées de X dans $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|_\infty \begin{cases} \mathcal{B}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)| \end{cases}$ est une norme.

1.3 Distance associée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ l'application :

$$d \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto d(x, y) = \|y - x\| \end{cases}$$

($d(x, y)$ s'appelle distance de x à y)

On a alors :

1. $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ (en particulier $d(x, x) = 0$)
2. $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$
 $d(x, y)$ se lit donc également "distance entre x et y ".

3. $\forall (x, y, z) \in E^3 \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Démonstration

1. trivial
2. $\forall (x, y) \in E^2 \ d(y, x) = \|x - y\| = \|(y - x)\| = \|y - x\| = d(x, y)$
- 3.

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \in E^3 \ d(x, y) &= \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

1.4 Boules et sphères

1.4.1 Définitions

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et d la distance associée.

Soient $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- On appelle sphère de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{S}(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) = r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| = r\}$$

- On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{B}(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) < r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| < r\}$$

- On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r et on note $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ l'ensemble :

$$\mathcal{B}_f(x_0, r) = \{x \in E \text{ tq } d(x_0, x) \leq r\} = \{x \in E \text{ tq } \|x - x_0\| \leq r\}$$

$\mathcal{B}(0_E, 1)$ s'appelle boule unité ouverte.

$\mathcal{B}_f(0_E, 1)$ s'appelle boule unité fermée.

1.4.2 Propriétés

- Pour tout $x_0 \in E$, $\mathcal{B}(x_0, 0) = \emptyset$ et $\mathcal{S}(x_0, 0) = \mathcal{B}_f(x_0, 0) = \{x_0\}$.
- Pour tout $x_0 \in E$ et tous r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}_+$ tq $r_1 < r_2$ on a :
 $\mathcal{B}(x_0, r_1) \subset \mathcal{B}_f(x_0, r_1) \subset \mathcal{B}(x_0, r_2)$
les inclusions étant strictes (sauf dans le cas $E = \{0\}$).
- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x_0, r) &= x_0 + \mathcal{S}(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{S}(0_E, r)\} \\ &= x_0 + r\mathcal{S}(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{S}(0_E, 1)\} \end{aligned}$$

- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x_0, r) &= x_0 + \mathcal{B}(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{B}(0_E, r)\} \\ &= x_0 + r\mathcal{B}(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{B}(0_E, 1)\} \end{aligned}$$

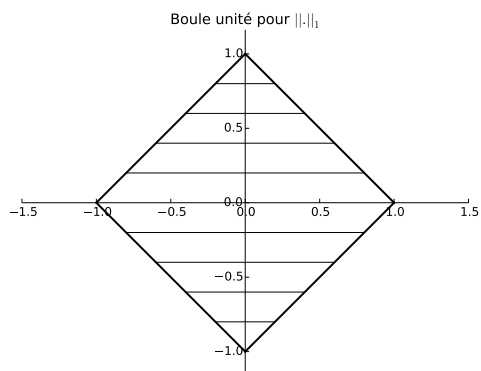
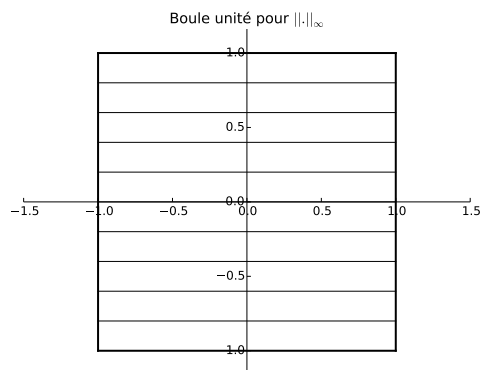
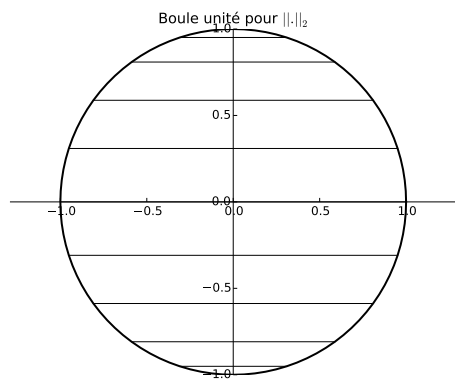
- Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f(x_0, r) &= x_0 + \mathcal{B}_f(0_E, r) \text{ ie } \{x_0 + y, y \in \mathcal{B}_f(0_E, r)\} \\ &= x_0 + r\mathcal{B}_f(0_E, 1) \text{ ie } \{x_0 + ry, y \in \mathcal{B}_f(0_E, 1)\} \end{aligned}$$

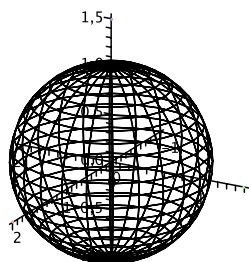
1.5 Exemples

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue :
 $\mathcal{S}(x_0, r) = \{x_0 - r; x_0 + r\}$ si $r > 0$, $\{x_0\}$ si $r = 0$.
 $\mathcal{B}(x_0, r) =]x_0 - r; x_0 + r[$
 $\mathcal{B}_f(x_0, r) = [x_0 - r; x_0 + r]$

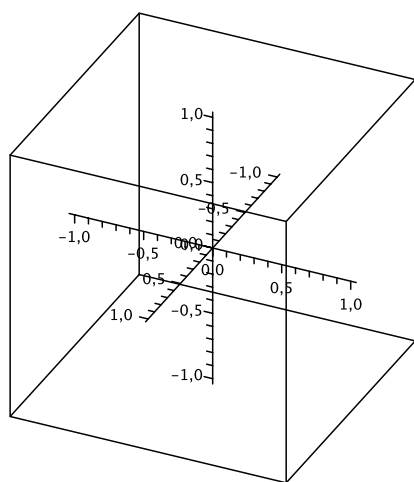
- Dans $\mathbb{R}^2$:



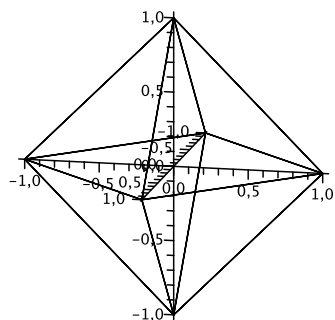
- Dans $\mathbb{R}^3$:
 — Pour la norme $\|\cdot\|_2$:



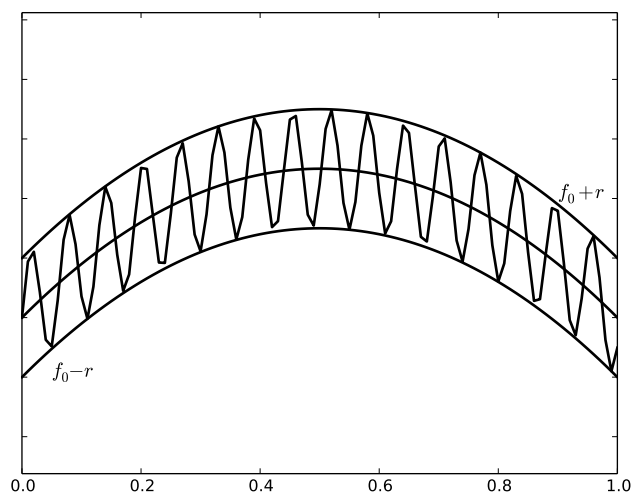
— Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:



— Pour la norme $\|\cdot\|_1$:



- Dans $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, on ne peut pas représenter les boules (l'espace est de dimension infinie) mais pour $\|\cdot\|_\infty$, on peut faire un dessin.



Les éléments de $\mathcal{B}_f(f_0, r)$ sont les fonctions g telles que la courbe d'équation $y = g(x)$ soit toute entière contenue dans la partie du plan limitée par $y = f_0(x) + r$, $y = f_0(x) - r$ et $x \in [0; 1]$.

2 Parties convexes

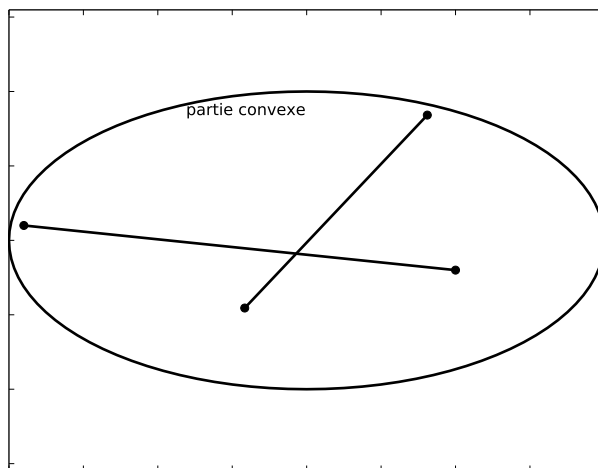
2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et C une partie de E .

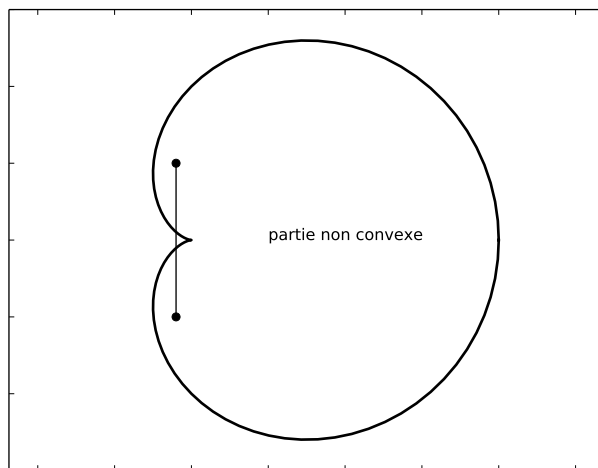
C est dite convexe lorsque, pour tous x et y de C , le segment $[x; y]$ est tout entier contenu dans C , i.e. :

$$C \text{ convexe} \iff \forall (x, y) \in C^2 \forall t \in [0; 1] (1 - t)x + ty \in C$$

- Un exemple de partie convexe du plan



- Un exemple de partie non convexe du plan



2.2 Exemples

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
Tout sous-espace vectoriel de E est une partie convexe de E .
- **Exemple mentionné dans le programme**
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.
Les boules (ouvertes ou fermées) de E sont des parties convexes de E .

Démonstration

Soient x et $y \in \mathcal{B}(x_0, r)$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; 1] \quad \|(1-t)x + ty - x_0\| &= \|(1-t)x + ty - (1-t + t)x_0\| \\ &= \|(1-t)(x - x_0)\| + \|t(y - x_0)\| \\ &\leq |1-t| \|x - x_0\| + |t| \|y - x_0\| \\ &\leq (1-t) \|x - x_0\| + t \|y - x_0\| \end{aligned}$$

$\|x - x_0\| < r$ et $\|y - x_0\| < r$. De plus t ou $1-t$ est *strictement* positif donc
 $\|(1-t)x + ty - x_0\| < (1-t)r + tr = r$
 Idem (en plus facile) pour les boules fermées.

3 Parties, suites et fonctions bornées

3.1 Parties bornées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

Soit A une partie de E .

On dit que A est bornée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tq pour tout $x \in A$ $\|x\| \leq M$.

Les sphères et les boules (ouvertes ou fermées) sont des exemples de parties bornées de E .

Démonstration

Soit $x \in \mathcal{S}(x_0, r)$.

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| = r + \|x_0\| = M$$

Idem pour les boules.

3.2 Fonctions bornées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

Soit X un ensemble non vide.

Une application $f : X \rightarrow E$ est dite bornée si et seulement si $f(X)$ est une partie bornée de E .

On a donc :

$$f : X \rightarrow E \text{ bornée} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in X \quad \|f(x)\| \leq M$$

Exemple

On prend $E = \mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne usuelle.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) \mapsto (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) \end{cases}$$

f est bornée car $f(\mathbb{R}^2)$ est la sphère (euclidienne) de centre O et de rayon R .

3.3 Suites bornées

C'est le cas particulier où $X = \mathbb{N}$ ou plus généralement $X = \llbracket n_0; +\infty \rrbracket$ dans la définition précédente :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs dans E .

$$(u_n)_{n \geq n_0} \text{ bornée} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad \|u_n\| \leq M$$

Exemple

On prend $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(n x) \end{cases}$.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.