

ALGEBRE LINEAIRE

2022-2023

Correction des exercices du deuxième chapitre du cours

Exercice 1 (*X 2010*)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont-ils en somme directe ? Et si f est diagonalisable ?

Correction

En général, le noyau et l'image de f ne sont pas supplémentaires.

Par exemple si $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 1$ et si f est la dérivation alors $\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ne sont pas supplémentaires.

Par contre si f est diagonalisable alors le noyau et l'image de f sont supplémentaires :

on considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f .

On note λ_i la valeur propre de f associée à e_i .

On peut s'arranger pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(\lambda_{p+1}e_{p+1}, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)\end{aligned}$$

On en déduit que le noyau de f est de dimension p .

Mais on a trivialement $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Ker}(f)$ avec $(e_1, \dots, e_p)$ libre donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

$\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont bien supplémentaires.

Exercice 2 (*X 2015*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Montrer que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Correction

Compte tenu de la formule du rang, c'est le même exercice que le précédent.

Exercice 3 (*CCP 2012*)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

1. Montrer que le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^3 = f$.

Correction

1. f^2 est un projecteur donc $f^4 = (f^2)^2 = f^2$.

Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de f .

Le spectre de f est inclus dans l'ensemble de ses racines donc le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

2. On suppose f diagonalisable.

Le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ annule f .

Il en est de même de ses multiples.

Mais $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$ donc $X^3 - X = \prod_{\lambda \in \{-1, 0, 1\}} (X - \lambda)$ est un multiple de $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$.

On en déduit que $X^3 - X$ annule f ie $f^3 = f$.

Réciproquement, on suppose $f^3 = f$.

f est annulé par $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ qui est scindé à racines simples donc f est diagonalisable.