Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres (2 à 2 distinctes).

- **Le point de vue géométrique**

  u est diagonalisable donc $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

  Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, soit p_i le projecteur sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} E_{\lambda_j}(u)$.

  Si $i \neq j$, $\mathrm{Im}\,(p_j) = E_{\lambda_j}(u) \subset \mathrm{Ker}\,(p_i)$ donc $p_i \circ p_j = 0$
  On a donc :
  $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2\ p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$
  Soit $x \in E$.
  $\exists ! (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tq $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$.
  p_i est l'application qui à x associe x_i.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ u^n(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} u^n(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i^n x_i$ cf 4.1
  On a donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ u^n = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i^n p_i$

- **Le point de vue algébrique**

  Le polynôme $P = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ annule u.

  Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} (X - \lambda_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p} (\lambda_i - \lambda_j)} \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $p_i = L_i(u) \in \mathcal{L}(E)$.

  Soit $i \in [\![1;p]\!]$.
  $\forall j \in [\![1;p]\!]\ L_i(\lambda_j)^2 = \delta_{i,j}^2 = \delta i, j = L_i(\lambda_j)$ car $\delta_{i,j} = 0$ ou 1.
  Donc le polynôme P divise le polynôme $L_i^2 - L_i$: $L_i^2 - L_i = Q_i P$ avec $Q_i \in \mathbb{K}[X]$.
  On en déduit $p_i^2 - p_i = L_i^2(u) - L_i(u) = Q_i(u) \circ P(u) = 0$: p_i est un projecteur.
  Soit $j \in [\![1;p]\!] \setminus \{i\}$.
  Les racines de $L_i L_j$ sont λ_i et λ_j simples et λ_k, $k \in [\![1;p]\!] \setminus \{i;j\}$ doubles.
  Donc P divise $L_i L_j$ et $p_i \circ p_j = 0$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{K}[X]$ tq $X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X)$ avec le degré de R_n strictement inférieur à celui de P
$\forall i \in [\![1; p]\!]$ $\lambda_i^n = P(\lambda_i)Q_n(\lambda_i) + R_n(\lambda_i) = R_n(\lambda_i)$
$u^n = P(u)Q_n(u) + R_n(u) = R_n(u)$
$R_n \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ donc d'après le cours sur l'interpolation de Lagrange :
$R_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} R_n(\lambda_i)L_i$
On en déduit $u^n = R_n(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} R_n(\lambda_i)p_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n p_i$