ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 2

941

1 Recherche d'éléments propres

Exercice 1 *(Mines 2015)*

$$T\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\right) \end{cases}.$$

1. Montrer que T est un automorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Quelles sont les valeurs propres de T ?

2 Propriétés des éléments propres

Exercice 2 *(Mines 2019)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie ou infinie et u et v deux endomorphismes de E.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$.
   Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $u\begin{cases} E \to E \\ P \mapsto \displaystyle\int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $v\begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P' \end{cases}$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}\,(v \circ u)$.
   Commenter.
3. On suppose que E est de dimension finie.
   Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors 0 est valeur propre de $v \circ u$.

3 Diagonalisation : le point de vue géométrique

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A$ et (A, I_n) libre.
On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ f(M) = AM$

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$.

2. f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Exercice 4 *(CCP 2023)*

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n = 0\right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R}^4 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{cases}$.
   Montrer que φ est un isomorphisme.
   Donner la dimension de E.
3. Montrer que l'application $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de E.
4. Montrer que $T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$.
   Montrer que $(T - 3id_E)^2 \circ (T + 2id_E)^2 = 0$.
5. Donner les valeurs propres possibles de T.
6. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   Est-ce que T est diagonalisable ?
7. Montrer :
   - $\mathrm{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \cap \mathrm{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right) = \{0\}$
   - $\mathrm{Im}\left((T + 2id_E)^2\right) \subset \mathrm{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right)$
   - $E = \mathrm{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \oplus \mathrm{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right)$
8. Donner une base de E.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit ϕ une forme linéaire non nulle de E.
Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) \neq 0$.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \phi(x)a - \phi(a)x \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 *(Mines 2001)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres 2 à 2 distinctes : $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ soit e_i un vecteur propre associé à λ_i.
Soit $x_0 = e_1 + \cdots + e_n$.
Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Exercice 7 *(Centrale 99)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
On suppose $fg - gf = \alpha f$.

1. Montrer :
   $\forall k \in \mathbb{N}^* \; f^k g - g f^k = k\alpha f^k$
2. Soient v un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée.
   Calculer $g(f^k(v))$.
   Montrer :
   $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $f^k(v) = 0$
3. On suppose g diagonalisable. Montrer que f est nilpotent.

Exercice 8 *(Centrale 2017)*

On note $E = \mathbb{C}_n[X]$.
Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ ayant $n+1$ racines simples.
Soit $A \in \mathbb{C}[X]$.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 9 *(Mines 2003)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0\}$ et de E, stable par u.

1. Montrer que u_F l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe G supplémentaire de F stable par u.

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ un vecteur non nul de E.

1. Montrer :
   $\exists! f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!] \; f(e_i) = v$
2. Quel est le rang de f ?
3. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur v pour que f soit diagonalisable.
5. Exprimer f^2 comme combinaison linéaire de f et de id_E et retrouver le résultat de la question précédente.