ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 2
Correction

941

1 Recherche d'éléments propres

Exercice 1 *(Mines 2015)*

$$T\begin{cases}\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\right)\end{cases}.$$

1. Montrer que T est un automorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Quelles sont les valeurs propres de T ?

Correction
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $T(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Passons à la linéarité de T.
Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ T(\lambda f+\mu g)(x) &= \int_0^x (\lambda f+\mu g)(x)\,\mathrm{d}x + (\lambda f+\mu g)(x)\\ &= \int_0^x (\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x + \lambda f(x)+\mu g(x)\\ &= \lambda\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x + \mu\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda f(x)+\mu g(x) \text{ linéarité de l'intégrale}\\ &= \lambda T(f)(x)+\mu T(g)(x)\end{aligned}$$

Donc $T(\lambda f+\mu g) = \lambda T(f)+\mu T(g)$.
T est donc une application linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ie un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Soit f dans le noyau de T.
$\forall x \in [0;1]\ f(x) = -\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Sous cette forme, f est $\mathcal{C}^1$ et $f(0)=0$.
En dérivant, on obtient $f'(x) = -f(x)$ et $f(x) = C\,\mathrm{e}^{-x}$.
Avec $f(0)=0$, f est la fonction nulle.

T est injective.
Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
L'équation différentielle $y' + y = g(x)$ a une solution, et une seule, nulle en 0, on la note F.
F est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut donc définir $f = F' \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
F étant nulle en 0, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $T(f) = g$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que $T(f) = \lambda f$.
$\forall x \in [0;1]$ $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = (\lambda - 1)f(x)$.

- **Premier cas :** $\lambda = 1$
  $\forall x \in [0;1]$ $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
  On dérive : $f = 0$.
- **Deuxième cas :** $\lambda \neq 1$
  On divise par $\lambda - 1$, et on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
  On peut dériver :
  $\forall x \in [0;1]$ $f(x) = (\lambda - 1)f'(x)$.
  De plus $0 = (\lambda - 1)f(0)$ donc $f(0) = 0$.
  f est solution de $y' = \dfrac{1}{\lambda - 1}y$ donc :
  $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = C\exp\left(\dfrac{x}{\lambda - 1}\right)$.
  $f(0) = 0$ donc $C = 0$ et f est la fonction nulle.

Finalement, T n'a aucune valeur propre.

2 Propriétés des éléments propres

Exercice 2 *(Mines 2019)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie ou infinie et u et v deux endomorphismes de E.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$.
   Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On prend $E = \mathbb{R}[X]$, $u \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto \displaystyle\int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et $v \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P' \end{cases}$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}\,(v \circ u)$.
   Commenter.
3. On suppose que E est de dimension finie.
   Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors 0 est valeur propre de $v \circ u$.

Correction

1. Soit x un vecteur propre de uv associé à la valeur propre λ.
   $uv(x) = \lambda x$.
   Donc $(vu)(v(x)) = \lambda v(x)$.
   Si $v(x) = 0$ alors $uv(x) = u(v(x)) = 0$ donc $\lambda x = 0$.
   x est un vecteur propre donc x est non nul et $\lambda = 0$.
   C'est absurde donc $v(x)$ est non nul et c'est un vecteur propre de vu associé à la valeur propre λ.

2. $u \circ v \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto P(X) - P(0) \end{cases}$
   $\mathrm{Ker}\,(u \circ v) = \mathbb{R}_0[X]$ et 0 est valeur propre de $u \circ v$.
   $v \circ u = id_{\mathbb{R}[X]}$, $\mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \{0\}$ et 0 n'est pas valeur propre de $v \circ u$.
   L'implication de la première question n'est pas valable en dimension infinie.
3. Si 0 est valeur propre de uv, c'est que uv n'est pas inversible. vu ne peut alors l'être ($\det(vu) = \det(uv) = \det(u)\det(v)$) et 0 est valeur propre de vu.

3 Diagonalisation : le point de vue géométrique

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2A$ et (A, I_n) libre.
On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ f(M) = AM$

1. Déterminer $f^2 = f \circ f$.
2. f est-elle diagonalisable ? Trouver son spectre.

Correction

1.
$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ f^2(M) &= f(f(M)) = f(AM) = A(AM) = A^2M \\ &= 2AM = 2f(M) \end{aligned}$$
   Donc $f^2 = 2f$.
2. Le polynôme $X^2 - 2X = X(X-2)$ est scindé à racines simples et annule f donc f est diagonalisable.
   Le spectre de f est inclus dans l'ensemble des racines de P donc dans $\{0; 2\}$.
   f est diagonalisable donc $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$.
   Supposons $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.
   f étant diagonalisable, on aurait $f = 0$.
   En particulier $A = AI_n = f(I_n) = 0$ et (A, I_n) est liée.
   Supposons $\mathrm{Sp}(f) = \{2\}$.
   f étant diagonalisable, on aurait $f = 2Id$.
   En particulier $A = AI_n = f(I_n) = 2I_n$ et (A, I_n) est liée.
   Finalement $\mathrm{Sp}(f) = \{0; 2\}$.

Exercice 4 *(CCP 2023)*

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n = 0\right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soit $\varphi \begin{cases} E \to \mathbb{R}^4 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3) \end{cases}$.
   Montrer que φ est un isomorphisme.
   Donner la dimension de E.
3. Montrer que l'application $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de E.

4. Montrer que $T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$.
   Montrer que $(T - 3id_E)^2 \circ (T + 2id_E)^2 = 0$.
5. Donner les valeurs propres possibles de T.
6. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   Est-ce que T est diagonalisable ?
7. Montrer :
   - $\text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \cap \text{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right) = \{0\}$
   - $\text{Im}\left((T + 2id_E)^2\right) \subset \text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right)$
   - $E = \text{Ker}\left((T - 3id_E)^2\right) \oplus \text{Ker}\left((T + 2id_E)^2\right)$
8. Donner une base de E.

Correction

1. On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   - $E \subset \mathbb{R}^n$
   - La suite nulle appartient à E.
   - E est stable par combinaisons linéaires.
     Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E.
     Soit λ et μ deux réels.
     Soit $w = \lambda u + \mu v$.

$$\begin{array}{rl} & \forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+4} - 2w_{n+3} - 11w_{n+2} + 12w_{n+1} + 36w_n \\ = & \lambda(u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n) \\ & +\mu(v_{n+4} - 2v_{n+3} - 11v_{n+2} + 12v_{n+1} + 36v_n) \\ = & \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \end{array}$$

2. On vérife facilement que φ est linéaire.
   Etant donné $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, il existe une et une seule suite vérifiant la relation de récurrence et les conditions initiales $u_0 = x$, $u_1 = y$, $u_2 = z$ et $u_3 = t$.
   En d'autres termes, φ est bijective.
   φ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   On en déduit que E a la même dimension que $\mathbb{R}^4$ ie 4.
3. Soit $u \in E$.
   On note $v = T(u)$.

$$\begin{array}{rl} & \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+4} - 2v_{n+3} - 11v_{n+2} + 12v_{n+1} + 36v_n \\ = & u_{n+4+1} - 2u_{n+3+1} - 11u_{n+2+1} + 12u_{n+1+1} + 36u_{n+1} \\ = & u_{n+1+4} - 2u_{n+1+3} - 11u_{n+1+2} + 12u_{n+1+1} + 36u_{n+1} \\ = & 0 \end{array}$$

   Donc $T(u) \in E$.
   On vérifie ensuite facilement la linéarité de T.
4. Soit $u \in E$.
   $T(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $T^2(u) = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et ainsi de suite.
   $(T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E)(u) = (u_{n+4} - 2u_{n+3} - 11u_{n+2} + 12u_{n+1} + 36u_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

$$\begin{array}{rcl} (X-3)^2(X+2)^2 & = & (X^2 - 6X + 9)(X^2 + 4X + 4) \\ & = & X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 6X^3 - 24X^2 - 24X + 9X^2 + 36X + 36 \\ & = & X^4 - 3X^3 - 11X^2 + 12X + 36 \end{array}$$

Donc :
$(T-3id_E)^2 \circ (T+2id_E)^2 = T^4 - 2T^3 - 11T^2 + 12T + 36id_E = 0$

5. Le polynôme $(X-3)^2(X+2)^2$ annule T donc le spectre de T est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme $(X-3)^2(X+2)^2$.
Les valeurs propres possibles de T sont donc -2 et 3.

6. On regarde si 3 est valeur propre de T.
Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}\,(T-3id_E) &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ un+1 = 3u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 3^n u_0 \end{aligned}$$

De plus la suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E :

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}\ 3^{n+4} - 2\ 3^{n+3} - 11\ 3^{n+2} + 12\ 3^{n+1} + 36\ 3^n \\ = \ & 3^n(3^4 - 2\ 3^3 - 11\ 3^2 + 12\ 3 + 36) \\ = \ & 3^n(3-3)^2(3+2)^2 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

Donc 3 est valeur propre de T et les vecteurs propres associés sont les suites $(3^n u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \neq 0$.
On montre de même que -2 est valeur propre de T et les vecteurs propres associés sont les suites $((-2)^n u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 \neq 0$.

7. La somme des dimensions des sous-espaces propres de T est 2 et E est de dimension 4 donc T n'est pas diagonalisable.

8.
   - Soit $u \in \text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right) \cap \text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right) = \{0\}$.
   $T^2(u) - 6T(u) + 9u = (T-3id_E)^2(u) = 0$
   De même $T^2(u) + 4T(u) + 4u = 0$
   En faisant la différence, on obtient $-10T(u) + 5u = 0$.
   Donc $T(u) = -\dfrac{1}{2}u$.
   Mais $-\dfrac{1}{2}$ n'est pas valeur propre de T donc $u = 0$.
   - $(T-3id_E)^2 \circ (T+2id_E)^2 = 0$ donc $\text{Im}\left((T+2id_E)^2\right) \subset \text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right)$
   - $\text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right) \cap \text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right) = \{0\}$ donc la somme $\text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right) + \text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)$ est directe.

$$\begin{aligned} & \dim\Big(\text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right) \oplus \text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)\Big) \\ = \ & \dim\Big(\text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right)\Big) + \dim\Big(\text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)\Big) \\ \geq \ & \dim\Big(\text{Im}\left((T+2id_E)^2\right)\Big) + \dim\Big(\text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)\Big) \\ & \text{ d'après l'inclusion précédente} \\ = \ & 4 \end{aligned}$$

   Donc :
   $E = \text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right) \oplus \text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)$

9. Pour obtenir une base de E il suffit de concaténer une base de $\text{Ker}\left((T-3id_E)^2\right)$ et une base de $\text{Ker}\left((T+2id_E)^2\right)$.

Ker $\left((T-3id_E)^2\right)$ est l'ensemble des suites de E qui vérifient également la relation de récurrence $u_{n+2}-6u_{n+1}+9u_n=0$.
Mais en fait si une suite vérifie cette relation de récurrence alors elle appartient à E.
En effet si on note $\tau \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\mathbb{N} \\ (u_n)_{n_i n\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$, on a
Ker $\left((\tau-3id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2\right) \subset$ Ker $\left((\tau-3id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2(\tau+2id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}})^2\right)=E$.
D'après le cours de sup, Ker $\left((T+2id_E)^2\right)$ a pour base $((3^n)_{n\in\mathbb{N}},(n3^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Finalement, E a pour base $((3^n)_{n\in\mathbb{N}},(n3^n)_{n\in\mathbb{N}},((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}},(n(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit ϕ une forme linéaire non nulle de E.
Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) \neq 0$.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \phi(x)a-\phi(a)x \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ?

Correction

1. f va clairement de E dans E.

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\ f(\lambda x+\mu y) &= \phi(\lambda x+\mu y)a-\phi(a)(\lambda x+\mu y)\\ &= (\lambda\phi(x)+\mu\phi(y))\,a-(\lambda\phi(a)x+\mu\phi(a)y)\\ &= \lambda\,(\phi(x)a-\phi(a)x)+\mu\,(\phi(y)a-\phi(a)y)\\ &= \lambda f(x)+\mu f(y)\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire.

2. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$ tels que $f(x)=\lambda x$.
$\phi(x)a-\phi(a)x=\lambda x$
Donc, en prenant ϕ :
$\phi(x)\phi(a)-\phi(a)\phi(x)=\lambda\phi(x)$
D'où $\lambda\phi(x)=0$.
On traite d'abord le cas $\lambda\neq 0$.
On obtient $\phi(x)=0$ puis :
$\lambda x=f(x)=\phi(x)a-\phi(a)x=-\phi(a)x$
Si $\lambda\neq-\phi(a)$ alors $x=0$ et λ n'est pas valeur propre.
A ce stade, on peut affirmer : $\mathrm{Sp}(f)\subset\{0;-\phi(a)\}$ (rappelons qu'on a supposé $\phi(a)\neq 0$).
Soit $x\in E$.

$$\begin{aligned} f(x)=-\phi(a)x &\iff \phi(x)a-\phi(a)x=-\phi(a)x\\ &\iff \phi(x)a=0\\ &\iff \phi(x)=0\ a\neq 0 \text{ car } \phi(a)\neq 0\end{aligned}$$

$-\phi(a)$ est donc valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant l'hyperplan $\mathrm{Ker}\,(\phi)$.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \phi(x)a-\phi(a)x=0 \\ &\iff x=\frac{\phi(x)}{\phi(a)}a \\ &\implies x\in\mathbb{K}a \end{aligned}$$

Réciproquement, $f(a)=0$ donc 0 est bien valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant la droite dirigée par a.

3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est $n-1+1=n$ donc f est diagonalisable.

Exercice 6 *(Mines 2001)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ ayant n valeurs propres 2 à 2 distinctes : $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$ soit e_i un vecteur propre associé à λ_i.
Soit $x_0=e_1+\cdots+e_n$.
Montrer que $(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Correction
D'après le cours, $(e_1,\dots,e_n)$ est libre. Vu qu'elle est formée de $n=\dim(E)$ vecteurs, c'est une base de E.
$\forall k\in\mathbb{N}\ f^k(x_0)=\displaystyle\sum_{i=1}^n f_i^k(e_i)=\sum_{i=1}^n\lambda_i^k e_i$

- **Première méthode : sans calcul matriciel**
  Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ tq $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k f^k(x_0)=0$
  $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i^k e_i\right)=0$
  En permutant les deux sommes, on obtient :
  $\displaystyle\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\lambda_i^k\right)e_i=0$
  La famille $(e_1,\dots,e_n)$ étant libre, on en déduit :
  $\forall i\in[\![1;n]\!]\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\lambda_i^k=0$
  Soit $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k X^k$.
  P a n racines deux à deux distinctes et P est de degré au plus $n-1$ donc $P=0$.
  Donc :
  $\forall k\in[\![0;n-1]\!]\ \alpha_k=0$
  Donc $(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
  Vu le nombre de vecteurs, c'est une base de E.

- **Deuxième méthode : utilisation du déterminant de Vandermonde**
  Le déterminant de la famille $(x_0,f(x_0),\dots,f^{n-1}(x_0))$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

car les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 7 *(Centrale 99)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
On suppose $fg - gf = \alpha f$.

1. Montrer :
   $\forall k \in \mathbb{N}^* \ f^k g - g f^k = k\alpha f^k$
2. Soient v un vecteur propre de g et λ la valeur propre associée.
   Calculer $g(f^k(v))$.
   Montrer :
   $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $f^k(v) = 0$
3. On suppose g diagonalisable. Montrer que f est nilpotent.

Correction

1. On raisonne par récurrence sur k.
   $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

$$\begin{aligned} f^{k+1} g &= f(f^k g) = f(k\alpha f^k + g f^k) = k\alpha f^{k+1} + (fg) f^k \\ &= k\alpha f^{k+1} + (gf + \alpha f) f^k = k\alpha f^{k+1} + g f^{k+1} + \alpha f^{k+1} \end{aligned}$$

   D'où le résultat.
2.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \ g(f^k(v)) &= -k\alpha f^k(v) + f^k(g(v)) = -k\alpha f^k(v) + f^k(\lambda v) \\ &= (\lambda - k\alpha) f^k(v) \end{aligned}$$

   Supposons : $\forall k \in \mathbb{N}^* \ f^k(v) \neq 0$
   Alors :
   $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \lambda - k\alpha \in \mathrm{Sp}(g)$
   Mais $\alpha \neq 0$ donc $\{\lambda - k\alpha, k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini.
   Or $\mathrm{Sp}(g)$ est fini : on aboutit à une contradiction.
   Donc : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $f^k(v) = 0$
3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de g (on suppose que la dimension de E est strictement positive, le cas contraire étant trivial).
   $\forall i \in [\![1; n]\!] \ \exists k_i \in \mathbb{N}^*$ tq $f^{k_i}(e_i) = 0$
   Soit $k = \max(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall i \in [\![1; n]\!] \ f^k(e_i) = f^{k-k_i}(f^{k_i}(e_i)) = f^{k-k_i}(0) = 0$
   Or $\mathcal{B}$ est une base de E donc $f^k = 0$

Exercice 8 *(Centrale 2017)*

On note $E = \mathbb{C}_n[X]$.
Soit $B \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ ayant $n+1$ racines simples.
Soit $A \in \mathbb{C}[X]$.
Soit $f \begin{cases} E \to E \\ P \mapsto R \end{cases}$ où R est le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que f est diagonalisable.

Correction

1. Par définition de la division euclidienne :
   $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$ $\mathrm{Deg}(f(P)) < \mathrm{Deg}(B) = n+1$
   $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$ $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$
   f est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même.
   Montrons que f est linéaire.
   Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
   $\exists P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tq $AP = P_1B + f(P)$
   $\exists Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ tq $AQ = Q_1B + f(Q)$
   $A(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P_1 + \mu Q_1)B + \lambda f(P) + \mu f(Q)$ avec $\lambda f(P) + \mu f(Q) \in \mathbb{C}_n[X]$
   Donc $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$
2. Soient $z_0, \dots, z_n$ les racines de B.
   $B = b\prod_{i=0}^{n}(X - z_i)$ avec $b \in \mathbb{C}^*$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tq $f(P) = \lambda P$.
   $\exists P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tq $AP = P_1B + f(P) = P_1B + \lambda P$
   Si on évalue cette relation en z_i, on a :
   $\forall i \in [\![0; n]\!]$ $A(z_i)P(z_i) = \lambda P(z_i)$
   Si λ est différent de tous les $A(z_i)$ alors P s'annule en tous les z_i. Cela fait $n+1$ racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n donc P est le polynôme nul.
   Il en résulte que λ n'est pas valeur propre de f.
   Si $\lambda \in \{A(z_i),\ 1 \leq i \leq n\}$, on est confronté à un problème : λ peut être égal à $A(z_i)$ pour plusieurs valeurs de i.
   Il faut donc changer de notations.
   On note AZ_k, $1 \leq k \leq p$ les valeurs deux à deux distinctes que prend A sur les racines de B.
   Pour tout k compris entre 1 et p, on note $E_k = \{i \in [\![0; n]\!] \text{ tq } A(z_i) = AZ_k\}$.
   On a $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(E_k) = n+1$.
   On suppose donc qu'il existe un (unique) $k \in [\![1; p]\!]$ tel que $\lambda = AZ_k$.
   Pour i n'appartenant pas à E_k, $A(z_i)P(z_i) = \lambda P(z_i)$ donne $P(z_i) = 0$.
   Donc P est un multiple de $P_k = \prod_{i \in [\![1;n]\!] \setminus E_k} (X - z_i)$.
   Réciproquement, si on suppose P multiple de P_k et on considère le polynôme $C = (A - \lambda)P$.
   A cause de P, les z_i pour $i \in [\![1; n]\!] \setminus E_k$ sont racines de C.
   A cause de $A - \lambda$, les z_i pour $i \in E_k$ sont racines de C.
   Donc B divise C :

$\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $(A-\lambda)P = QB$
$AP = QB + \lambda P$ avec λQ de degré inférieur ou égal à n donc strictement inférieur au degré de B.
Donc $f(P) = \lambda P$.
Les valeurs propres de f sont donc les AZ_k, $1 \leq k \leq p$.
Le sous-espace propre associé à AZ_k est l'ensemble des multiples de P_k qui appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$ ie l'ensemble des polynômes de la forme QP_k avec $\text{Deg}(Q) \leq n - \text{Deg}(P_k) = n - \sum_{l \in [\![1;p]\!] \setminus \{k\}} \text{Card}(E_l) = \text{Card}(E_k) - 1$ car $\sum_{l=1}^{p} \text{Card}(E_l) = n+1$.
Le sous-espace propre associé à AZ_k est donc de dimension $\text{Card}(E_k)$
La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est donc $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$.
f est donc diagonalisable.

Remarque
Cet exercice est très classique, il existe avec de nombreuses variantes.
Si on le connaît, une réponse plus rapide est possible :
Soit $i \in [\![0;n]\!]$.
Soit $P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - z_j) \in \mathbb{C}_n[X]$.
z_i est racine du polynôme $A(X) - A(z_i)$ donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $A(X) - A(z_i) = (X - z_i)Q$.
$(A(X) - A(z_i))\, P_i(X) = QB(X)$ et $A(X)P = QB(X) + A(z_i)P_i(X)$.
Donc $f(P_i) = A(z_i)P_i$.
Les P_i sont donc des vecteurs propres de f. Les valeurs propres associées n'étant pas forcément deux à deux distinctes, on ne peut pas affirmer d'emblée que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.
On revient donc à la définition :
soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tq $\sum_{i=0}^{n} a_i P_i = 0$
On vérifie facilement que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre (évaluation d'une combinaison linéaire en z_i).
Evalué en z_i cela donne $a_i P_i(z_i) = 0$ avec $P(z_i)$ non nul. Donc $a_i = 0$.
$(P_0, \ldots, P_n)$ est donc une famille libre de $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$.
$(P_0, \ldots, P_n)$ est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Elle est formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable.

Exercice 9 *(Mines 2003)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0\}$ et de E, stable par u.

1. Montrer que u_F l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe G supplémentaire de F stable par u.

Correction

1. u est diagonalisable donc il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.
   On a aussi $P(u_F) = 0$ donc u_F est diagonalisable.

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u.
   Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
   D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(f_1, \dots, f_p)$ par des vecteurs de $(e_1, \dots, e_n)$ en une base de E.
   Quitte à réindexer, on peut supposer que $(f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.
   $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est donc un supplémentaire de F.
   G est stable par u :
   Soit $x \in G$.
   $\exists (x_{p+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tq $x = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} x_k e_k$.
   Si on note λ_k la valeur propre associée à e_k alors :
   $u(x) = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k x_k e_k \in G$

Exercice 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ un vecteur non nul de E.

1. Montrer :
   $\exists! f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $f(e_i) = v$
2. Quel est le rang de f ?
3. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur v pour que f soit diagonalisable.
5. Exprimer f^2 comme combinaison linéaire de f et de id_E et retrouver le résultat de la question précédente.

Correction

1. Un endomorphisme est complètement déterminé par la donnée des images des vecteurs d'une base.
2. $\text{Im}\,(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(v)$ est de dimension 1.
3. D'après la formule du rang le noyau de f est de dimension $n - 1 > 0$.
   On en déduit que 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant de dimension $n - 1$.
   On peut aller plus loin :
   $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$
   Donc le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.
   Soit $\lambda \neq 0$ et $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
   $x = \dfrac{1}{\lambda} f(x)$ donc $x \in \text{Im}\,(f) = \text{Vect}(v)$.
   Réciproquement, $f(v) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v$
   v est propre pour f mais la valeur propre associée peut être nulle.

Si $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ alors 0 est la seule valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant de dimension $n-1$.
Si $\sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0$ alors f a deux vaelurs propres : 0, le sous-espace propre associé étant de dimension $n-1$ et $\sum_{i=1}^{n} v_i$, le sous-espace propre associé étant de dimension 1.

4.

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim\left(E_\lambda(f)\right) = n \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \ f^2(x) &= f(f(x)) = f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) f(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) v \end{aligned}$$

Donc $f^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) f$.
Si $\sum_{i=1}^{n} v_i \neq 0$ alors f est annulée par le polynôme scindé à racines simples $X\left(X - \sum_{i=1}^{n} v_i\right)$ donc f est diagonalisable.
Si $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ alors $f^2 = 0$ donc $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.
Si f était diagonalisable, f aurait un seul sous-espace propre égal à E et serait donc nulle, ce qui n'est pas car on a supposé v non nul donc f n'est pas diagonalisable.