PC*1
DM N°2
A rendre le jeudi 16 octobre 2025

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, a est un réel strictement positif.
Pour toute fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue, on définit une nouvelle fonction $U(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; U(f)(x) = \mathrm{e}^{-ax} \int_0^x f(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t$$

1. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue.
   (a) Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que $U(f)$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' + ay = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
2. Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue.
   (a) On suppose dans cette question et seulement dans cette question f positive.
   Montrer que $U(f)$ est positive.
   (b) Montrer que $|U(f)| \leq U(|f|)$.
3. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que $\|.\|_\infty \begin{cases} E \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x)| \end{cases}$ est une norme sur E.
   (b) Donner une fonction f de E telle que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \; |f(x)| < \|f\|_\infty$
   (c) Montrer que pour toute fonction f appartenant à E, la fonction $U(f)$ appartient aussi à E et que :
   $\|U(f)\|_\infty \leq \dfrac{1}{a}\|f\|_\infty$
   (d) Montrer qu'il n'existe pas de constante C strictement inférieure à $\dfrac{1}{a}$ telle que :
   $\forall f \in E \; \|U(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$
   On pourra s'intéresser à l'image par U des fonctions constantes.
4. Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
   $\|.\|_1 \begin{cases} F \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est une norme sur F. On ne demande pas de le démontrer.

(a) On suppose $f \in F$ et f positive.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} U(f)(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

(b) Montrer :
$\forall f \in F\ U(f) \in F$

(c) Montrer :
$\forall f \in F\ \ \|U(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{a}\|f\|_1$

(d) Montrer qu'il n'existe pas de constante C strictement inférieure à $\dfrac{1}{a}$ telle que :
$\forall f \in F\ \ \|U(f)\|_1 \leq C\|f\|_1$
On pourra s'intéresser à l'image par U de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-ax}$.

5. Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
L'application $\begin{cases} G \times G \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire sur G. On ne demande pas de le prouver.
La norme euclidienne associée est $\|.\|_2 \begin{cases} G \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t} \end{cases}$.

(a) Montrer :
$\forall f \in G\ U(f) \in G$

(b) Montrer :
$\forall f \in G\ \ \|U(f)\|_2 \leq \dfrac{1}{a}\|f\|_2$

(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C strictement inférieure à $\dfrac{1}{a}$ telle que :
$\forall f \in G\ \ \|U(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$
On pourra s'intéresser à l'image par U de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\epsilon x}$

Exercice 2

On note $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On définit $T : E \to E$ qui, à la fonction f associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

Généralités

1. Vérifier que T est bien un endomorphisme de E.
2. Montrer :
$\forall f \in E\ \displaystyle\int_0^1 T(f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
3. Soit $f \in E$.
Déterminer une relation entre la dérivée de $T(f)$ et la fonction $T(f')$.

Noyau de T

4. Soit $f \in E$.
Montrer :

$$f \in \mathrm{Ker}\,(T) \iff \forall t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\ f\left(t+\frac{1}{2}\right) = -f(t)$$

5. Montrer que 0 est valeur propre de T et que le sous-espace propre associé est de dimension infinie.

A propos des éléments propres de T : première méthode

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 1$.
   Soit $f \in E$ tel que $T(f) = \lambda f$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que :
   $\forall x \in [0;1]\ \ |f(x)| \leq |f(x_0)|$
   (b) En écrivant $T(f)(x_0) = \lambda f(x_0)$, montrer que $f(x_0) = 0$.
   (c) Que peut-on en conclure ?
7. Soit $f \in E$ telle que $T(f) = f$.
   (a) Soit $x_0 \in [0;1]$ tel que :
   $\forall x \in [0;1]\ f(x) \leq f(x_0)$
   On ne demande pas de justifier l'existence de x_0.
   Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = f(x_0)$
   (b) Montrer que $f(x_0) = f(0)$.
   (c) Montrer que f est une fonction constante.
   (d) Que peut-on en conclure ?
8. Montrer par récurrence sur p :
   si $|\lambda| > \dfrac{1}{2^p}$ et $\lambda \notin \left\{\dfrac{1}{2^k},\ 0 \leq k \leq p-1\right\}$ alors λ n'est pas valeur propre de T.
   Que peut-on en conclure ?
9. Montrer que $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de T et donner le sous-espace propre associé.
10. Montrer que $\dfrac{1}{4}$ est valeur propre de T et donner le sous-espace propre associé.

A propos des éléments propres de T : deuxième méthode

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, T^n est l'endomorphisme $T \circ \cdots \circ T$ avec n T.
Par convention, $T^0 = Id_E$.

11. Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer :

$$\forall x \in [0,1],\ T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

12. Rappeler le résultat sur les sommes de Riemann vu en PCSI.
    En déduire pour $f \in E$, la limite de $T^n(f)(0)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
13. Rappeler l'inégalité des accroissements finis.
    En déduire :
    $\forall f \in E\ \forall x \in [0;1]\ T^n(f)(x) - T^n(f)(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
14. Quels sont les réels λ tels que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?
    C'est une question de cours, on demande juste le résultat sans justification.
15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    Donner une condition nécessaire pour que λ soit valeur propre de T.

16. Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre de T et donner le sous-espace propre associé.
    Il s'agit d'utiliser les résultats de cette partie et non la première méthode.
17. On définit les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ par :

    i $f_0 \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$

    ii $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1) f_n(t)\,\mathrm{d}t$

    Montrer que les f_n sont des fonctions non nulles de E.
18. Déterminer f_1 et f_2.
19. Montrer :
    $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$
20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un vecteur propre de T.
    On précisera la valeur propre associée.