ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 2
Complément

941

Exercice 1 *(Centrale PSI 2025)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim $= n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent : $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $u^p = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
2. Soit $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u^k$. Montrer que v est bijective et trouver v^{-1}.
3. Montrer que $\ker(v - \mathrm{id}) = \ker(u)$.
4. Trouver le spectre de v.

Exercice 2 *(Mines-Telecom, MP 2015)*

Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(1)X + P(2)X^2 \end{cases}$.
Donner les éléments propres de u.

Exercice 3 *(Mines 2022)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
2. On suppose que f est diagonalisable.
   Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Exercice 4 *(Centrale Psi 2024)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E.
On dit que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On prend $E = \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation.
Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable de E.

Exercice 5 *(Mines MP 2016)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et s une symétrie de E.
Soit $\phi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto \dfrac{1}{2}(u \circ s + s \circ u) \end{cases}$.
Déterminer les éléments propres de ϕ.
ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 *(Centrale 2015)*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $p \in]0; 1[$.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :
$\forall f \in E \; \forall x \in \mathbb{R} \; u(f)(x) = f(p(x-1)+1)$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.