ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 2
Complément
Correction

941

Exercice 1 *(Centrale PSI 2025)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dim $= n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent : $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $u^p = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
2. Soit $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} u^k$. Montrer que v est bijective et trouver v^{-1}.
3. Montrer que $\ker(v - \mathrm{id}) = \ker(u)$.
4. Trouver le spectre de v.

Correction

1. X^p est un polynôme annulateur de u donc le spectre de u est contenu dans l'ensemble des racines de X^p.
   Donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0\}$.
   Supposons que 0 ne soit pas valeur propre de u.
   Alors u est injective et comme on est en dimension finie, $u \in GL(E)$.
   Mais alors $0 = u^p \in GL(E)$: c'est absurde (on a bien supposé que $E \neq \{0\}$).
   Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
2. $(id - u)v = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(id - u)u^k = \sum_{k=0}^{p-1} u^k - u^{k+1} = u^0 - u^p = id$
   Comme on est en dimension finie, cela suffit pour affirmer que v est bijective d'inverse $v^{-1} = id - u$.
3. Soit $x \in \ker(v - id)$.
   $v(x) = x$ et en appliquant v^{-1} : $x = v^{-1}(x) = x - u(x)$.
   D'où $u(x) = 0$ et $x \in \ker(u)$.
   On a donc montre $\ker(v - id) \subset \ker(u)$
   Réciproquement si $x \in \ker(u)$ alors :
   $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $u^k(x) = u^{k-1}(u(x)) = u^{k-1}(0) = 0$
   Donc $v(x) = u^0(x) = x$ ie $x \in \ker(v - id)$.
   On a donc prouvé $\ker(u) \subset \ker(v - id)$
   Par double inclusion, $\ker(v - id) = \ker(u)$

4. 0 étant valeur propre de u, $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et 1 est valeur propre de v.
   v étant bijective, v est injective et 0 n'est pas valeur propre de v.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$.
   Soit $x \in \ker(v - \lambda id)$.
   $v(x) = \lambda x$ donc en appliquant v^{-1} : $x = \lambda(x - u(x))$
   Donc $u(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) x$
   Or $1 - \dfrac{1}{\lambda} \neq 0$ donc $1 - \dfrac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre de u et $x = 0$. λ n'est donc pas valeur propre de v.
   Finalement $\mathrm{Sp}(v) = \{1\}$.

Exercice 2 *(Mines-Telecom, MP 2015)*

Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(1)X + P(2)X^2 \end{cases}$.
Donner les éléments propres de u.

Correction
On vérifie facilement que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. L'énoncé ne demande pas de le faire.
$\mathrm{Ker}\,(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\} = (X-1)(X-2)\mathbb{R}[X]$ n'est pas réduit au polynôme nul donc 0 est valeur propre de u.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda id)$
$u(P) = \lambda P$ avec $\lambda \neq 0$ donc $P = \dfrac{1}{\lambda} u(P) \in \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Vect}(X, X^2)$
On cherche donc les éléments de $\mathrm{Ker}\,(u)$ sous la forme $P = aX + bX^2$.
$u(aX + bX^2) = (a+b)X + (2a+4b)X^2$ donc :

$$u(P) = \lambda P \iff \begin{cases} a + b = \lambda a \\ 2a + 4b = \lambda b \end{cases} \iff \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ 2a + 4(\lambda - 1)a = \lambda(\lambda - 1)a \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ (\lambda^2 - 5\lambda + 2)a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = (\lambda - 1)a \\ (\lambda - r_1)(\lambda - r_2)a = 0 \end{cases}$$

avec $r_1 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$.
Si $\lambda \neq r_1, r_2$ le système devient $\begin{cases} b = (1 - \lambda)a \\ a = 0 \end{cases}$ donc le noyau de $u - \lambda id$ est réduit au polynôme nul et λ n'est pas valeur propre de u.
Si $\lambda = r_1$ le système devient $\begin{cases} b = (1 - r_1)a \\ 0 = 0 \end{cases}$ donc $\ker(u - r_1 id) = \mathbb{R}(X + (1 - r_1)X) \neq \{0\}$ et r_1 est valeur propre de u.
Si $\lambda = r_2$ le système devient $\begin{cases} b = (1 - r_2)a \\ 0 = 0 \end{cases}$ donc $\ker(u - r_2 id) = \mathbb{R}(X + (1 - r_2)X) \neq \{0\}$ et r_2 est valeur propre de u.

Exercice 3 *(Mines 2022)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Soit f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tq $f \circ g = f + g$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
2. On suppose que f est diagonalisable.
   Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Correction

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g)$.
   $0 = f(0) = f(g(x)) = f(x) + g(x) = f(x)$ donc $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
   Donc $\mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$
   Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.
   $\exists x \in E$ tq $y = g(x)$.
   $y = g(x) = f(g(x)) - f(x) = f(g(x) - x) \in \mathrm{Im}\,(f)$.
   Donc $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}\,(g)) \leq \dim(\mathrm{Im}\,(f))$
   Mais avec la formule du rang $\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f))$
   donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}\,(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$
   On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(g)$.
2. On remarque que $(f - id)(g - id) = fg - f - g + id = id$.
   Comme on est en dimension finie, $f - id$ est inversible et son inverse est $g - id_E$.
   f est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f.
   Les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de $f - id$, puis de $(f - id)^{-1} = g - id$ donc de g.
   Les vecteurs de $(e_1, \ldots, e_n)$ étant propres pour f et pour g, ils sont propres pour $f \circ g$.
   La base $\mathcal{B}$ est donc formée de vecteurs propres de $f \circ g$.

Exercice 4 *(Centrale Psi 2024)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E.
On dit que u est cyclique si, et seulement si, il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On prend $E = \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u la dérivation.
Montrer que u est un endomorphisme cyclique non diagonalisable de E.

Correction
La linéarité de u est celle de la dérivation.
$u(1) = 0 \in E$, $u(\cos) = -\sin \in E$ et $u(\sin) = \cos \in E$ donc u est un endomorphisme de E.
Prenons $f_0 = 1 + \cos$.
La famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est la famille $(1 + \cos, -\sin, -\cos)$. On ne change pas le rang de la famille en ajoutant à un de ses vecteurs une combinaison linéaire des autres donc le rang de la famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est égal à celui de la famille $(1, -\sin, -\cos)$, clairement égal à 3.
Donc la famille $(f_0, u(f_0), u^2(f_0))$ est une base de E et u est cyclique.

Si on veut être plus général, on prend $f = a + b\cos + c\sin$.
$u(f) = -b\sin + c\cos$ et $u^2(f) = -b\cos - c\sin$.

$$\begin{aligned}
\det_{(1,\cos,\sin)}(f, u(f), u^2(f)) &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & -b \\ c & -b & -c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} c & -b \\ -b & -c \end{vmatrix} \\
&= -a(b^2 + c^2)
\end{aligned}$$

Donc tout $f_0 = a + b\cos + c\sin$ avec $a \neq 0$ et $(b,c) \neq (0,0)$ convient pour montrer que u est cyclique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \operatorname{Ker}(u - \lambda id_E)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ et :
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x}$
Mais les fonctions de E sont 2π-périodiques donc $f(0) = f(2\pi)$ et $C = C\,\mathrm{e}^{2\lambda\pi}$
Si λ est un réel non nul alors $\mathrm{e}^{2\lambda\pi} \neq 1$ et $C = 0$.
$\operatorname{Ker}(u - \lambda id_E)$ est donc réduit à la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de u.
Par contre si $\lambda = 0$ alors $\operatorname{Ker}(u - \lambda id_E)$ est l'ensemble des fonctions constantes (on vient d'établir une inclusion, l'autre est évidente).
La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut donc 1 et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 5 *(Mines MP 2016)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et s une symétrie de E.
Soit $\phi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto \dfrac{1}{2}(u \circ s + s \circ u) \end{cases}$.
Déterminer les éléments propres de ϕ.
ϕ est-elle diagonalisable ?

Correction
On vérifie facilement que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. L'énoncé ne demande pas de le faire.
Si $s = id_E$, $\phi = id_{\mathcal{L}(E)}$ et si $s = -id_E$, $\phi = -id_{\mathcal{L}(E)}$ donc on peut supposer $s \neq \pm id_E$.
s est donc une symétrie par rapport à F parallèlement à G avec F et G deux sous-espaces supplémentaires de dimension strictement positive.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \ker(\phi - \lambda id)$
$us + su = 2\lambda u$
On compose par s à gauche : $sus + u = 2\lambda su$
On compose par s à droite : $u + sus = 2\lambda us$ Donc $\lambda(us - su) = 0$
Si $\lambda \neq 0$ alors $us = su$.
u et s commutent donc les sous-espaces propres de s, à savoir F et G sont stables par u.
Si $x \in F$:
$2\lambda u(x) = u(s(x)) + s(u(x)) = 2u(x)$
Si $x \in G$:
$2\lambda u(x) = u(s(x)) + s(u(x)) = -2u(x)$
Si $\lambda \neq 0, -1, 1$ alors u est nulle sur F et sur G donc u est nulle et λ n'est pas valeur propre de ϕ.
Si $\lambda = 1$, on trouve que u stabilise F et que u est nulle sur G.
Réciproquement, on suppose que u stabilise F et que u est nulle sur G.
Soit $x \in E$.
$\exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$
$u(x) = u(x_F) \in F$ donc $su(x) = u(x_F) = u(x)$
$us(x) = u(x_F - x_G) = u(x_F) - u(x_G) = u(x_F) = u(x)$
On a bien $\phi(u) = u$.
Donc $1 \in \operatorname{Sp}(\phi)$ et la dimension du sous-espace propre associé est p^2 où p est la dimension de F.
On montre de même que -1 est valeur propre de ϕ. Le sous-espace propre associé est l'ensemble

des endomorphismes de E nuls sur F qui stabilisent G. C'est un espace de dimension $(n-p)^2$.
Reste le cas $\lambda = 0$.
On a $us = -su$
Si $x \in F$ alors $u(x) = -su(x)$ donc $u(x) \in G$
Si $x \in G$ alors $-u(x) = -s(u(x))$ donc $u(x) \in F$.
Réciproquement, si $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$:
Soit $x \in E$.
$\exists!(x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$
$su(x) = s(u(X_F)) + s(u(x_G)) = -u(x_F) + u(x_G) = -u(x_F - x_G) = -us(x)$
Donc $u \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$
0 est valeur propre de ϕ, la dimension du sous-espace propre associé est $2p(n-p)$
$p^2 + (n-p)^2 + 2p(n-p) = (p+n-p)^2 = n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$ donc ϕ est diagonalisable.

Remarque

$$
\begin{aligned}
\forall u \in \mathcal{L}(E)\ \phi(u) &= \frac{1}{2}(us+su) \\
\phi^2(u) &= \frac{1}{2}\phi(us+su) = \frac{1}{4}((us+su)s + s(us+su)) \\
&= \frac{1}{4}(2u+2sus) = \frac{1}{2}(u+sus) \\
\phi^3 &= \frac{1}{2}\phi(u+sus) = \frac{1}{4}((u+sus)s + s(u+sus)) \\
&= \frac{1}{4}(us+su+su+us) = \frac{1}{2}(us+su)
\end{aligned}
$$

$\phi^3 = \phi$ ie $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de u.
$X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

Exercice 6 *(Centrale 2015)*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $p \in]0;1[$.
Soit u l'endomorphisme de E défini par :
$\forall f \in E\ \forall x \in \mathbb{R}\ u(f)(x) = f(p(x-1)+1)$.
Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Correction
Soit λ et $f \in E$ tels que $u(f) = \lambda f$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = p(x_n - 1) + 1$
On a donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_{n+1}) = \lambda f(x_n)$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ f(x_n) = \lambda^n f(x)$
Mais :
$x = p(x-1) + 1 \iff x = 1$
et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} - 1 = p(x_n - 1)$
On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n = 1 + p^n(x-1)$
Donc $\lambda^n f(x) = f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.
Si $\lambda \in]-\infty;-1] \cup]1;+\infty[$ alors la suite (λ^n) diverge donc $f(x) = 0$, pour tout x.
λ n'est pas valeur propre de u.
Si $\lambda = 1$, on trouve que la suite constante $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(1)$.
Donc f est constante.
La réciproque est triviale donc 1 est valeur propre de u et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.
Si $\lambda \in]-1;1[$, on obtient :
$f \in \ker(u - \lambda id_E) \Longrightarrow f(1) = 0$
Mais :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(p(x-1)+1) = \lambda f(x)$
ce qui donne en dérivant :
$\forall x \in \mathbb{R}\ pf'(p(x-1)) = \lambda f'(x)$
Donc si $\lambda = p$ alors f' est constante et $f(1) = 0$ donc f est de la forme $x \mapsto C(x-1)$.
Réciproquement, si f est de cette forme :
$\forall x \in \mathbb{R}\ u(f)(x) = f(p(x-1)+1) = C(p(x-1)+1-1) = Cp(x-1) = pf(x)$
Donc p est valeur propre de u et $E_p(u)$ est la droite dirigée par la fonction $x \mapsto x-1$.
Si f est dans le noyau de u :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f\left(p\left(1+\dfrac{x-1}{p}-1\right)+1\right) = u(f)\left(1+\dfrac{x-1}{p}\right) = 0$
0 n'est pas valeur propre de u.
On suppose $\lambda \neq 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(p(x-1)+1) = \lambda f(x)$
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ p^k f^{(k)}(p(x-1)+1) = \lambda f^{(k)}(x)$
Tant que $|\lambda| < p^k$, on a $f^{(k)}(1) = 0$
Si $\lambda \notin \left\{p^k; k \in \mathbb{N}\right\}$ alors on va avoir :
$f(1) = \cdots = f^{(k)}(1) = 0$ et $f^{(k+1)} = 0$ pour un certain k. f sera la fonction nulle et λ ne sera pas valeur propre de u.
Par contre si $\lambda = p^k$, on aura $f(1) = \cdots = f^{(k-1)}(1) = 0$ et $f^{(k)} = Cte$.
Donc f sera de la forme $f : x \mapsto C(x-1)^k$
La réciproque est triviale.
Finalement les valeurs propres de u sont les nombres p^k pour $k \in \mathbb{N}$, les vecteurs propres associés étant les fonctions $x \mapsto C(x-1)^p$ avec C non nul.