ANALYSE 1
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 2 :
Séries de nombres réels ou complexes

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

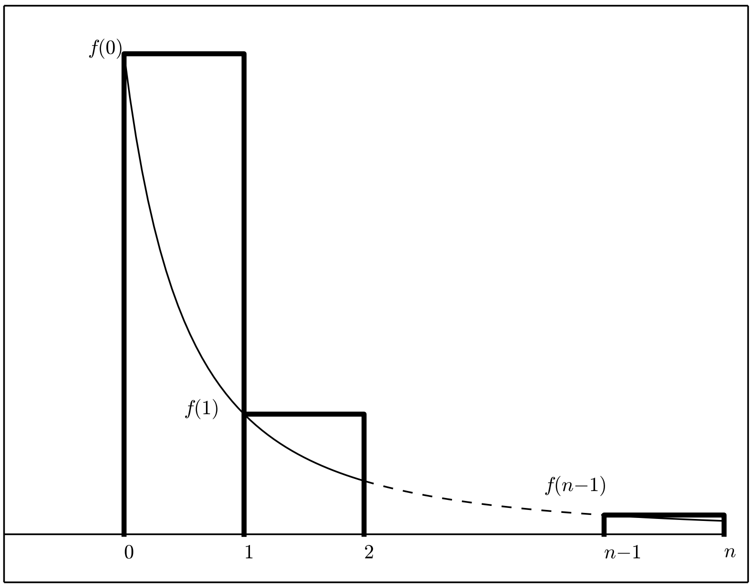
1 Comparaison d'une série à une intégrale

1.1 Théorème

(Première publication : Cauchy 1827)
Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante.
La série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow f$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Ce théorème s'applique aux fonctions continues par morceaux, décroissantes, positives sur $[a; +\infty[$ moyennant des modifications naturelles.

Démonstration
On suppose que $\sum_{n\geq 0} f(n)$ converge.



$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$

C'est clair sur le dessin, cela peut se justifier.

$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in [k; k+1]\ f(t) \leq f(k)$ car f est décroissante.

$\forall k \in \mathbb{N}\ \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$

Comme $f(k) \geq 0$ et $\sum f(k)$ converge :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$

Puis :

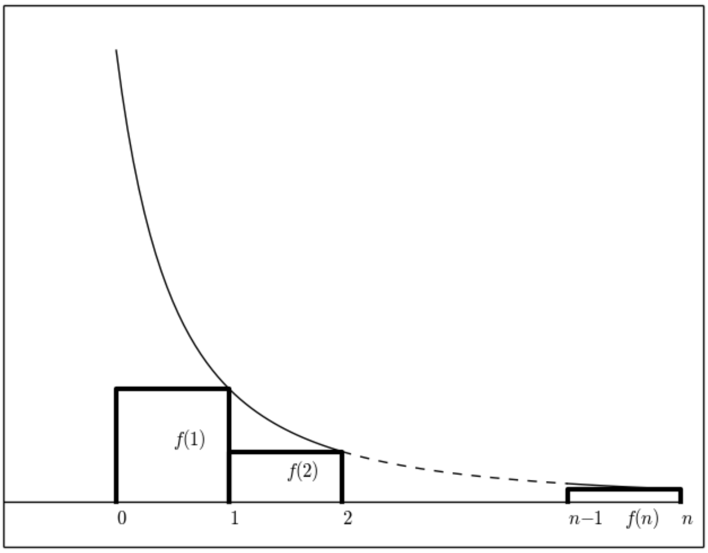
$\forall x \in \mathbb{R}_+\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)\,\mathrm{d}t$ car $f \geq 0$ et $x \leq \lfloor x \rfloor + 1$

On en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R}_+\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée et f est positive donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$.



$\forall n \in \mathbb{N}^*\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
C'est clair sur le dessin, cela peut se justifier.
$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [k-1; k]\ f(t) \geq f(k)$ car f est décroissante.
$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t = f(k)$
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} f(k)$
On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ S_n \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}\ (f \geq 0)$
(S_n) est majorée.
La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum f(n)$ est majorée donc $\sum f(n)$ converge.

1.2 Séries de Riemann

1.2.1 Définition

On appelle série de Riemann les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.2.2 Convergence des séries de Riemann

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1}$$

Démonstration
On suppose que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\alpha > 0$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$.
De plus, elle est continue et positive.
$\sum f(n)$ converge donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ et $\alpha > 1$.

On suppose $\alpha > 1$.
$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1; +\infty[$ donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

1.3 Autre exemple

Nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$?

- **Premier cas :** $\alpha > 1$.
  Soit $\gamma \in]1; \alpha[$.
  $n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\gamma - \alpha < 0$ ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$.
  De plus, $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.
- **Deuxième cas :** $\alpha < 1$.
  $n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $1 - \alpha > 0$.
  $\exists n_0 \geq 2$ tq $\forall n \geq n_0\ n u_n \geq 1$
  $\forall n \geq n_0\ u_n \geq \frac{1}{n} \geq 0$ avec $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.
- **Troisième cas :** $\alpha = 1$.
  $\forall n \geq 2\ u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$

Soit $f_\beta \begin{cases} [2;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta} \end{cases}$.
f_β est continue et positive sur $[2;+\infty[$.
En fait, f_β est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[2;+\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 2\ f_\beta(x) &= x^{-1}(\ln x)^{-\beta} \\ \forall x \geq 2\ f'_\beta(x) &= -x^{-2}(\ln x)^{-\beta} - \beta x^{-2}(\ln x)^{-\beta-1} = -x^{-2}(\ln x)^{-\beta-1}(\ln x + \beta) \end{aligned}$$

Donc :
$\exists x_\beta \in [2;+\infty[$ tq $\forall x \geq x_\beta\ f'_\beta(x) \leq 0$
(Si $\beta \geq 0$, on peut prendre $x_\beta = 2$)
f_β est décroissante sur $[x_\beta;+\infty[$.
D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge } &\iff f_\beta \text{ est intégrable sur } [2;+\infty[\\ &\iff \beta > 1 \end{aligned}$$

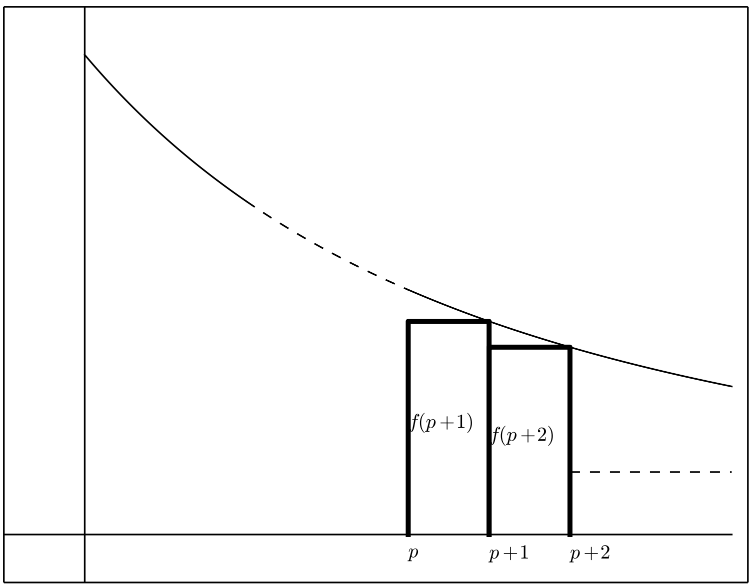
Finalement :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

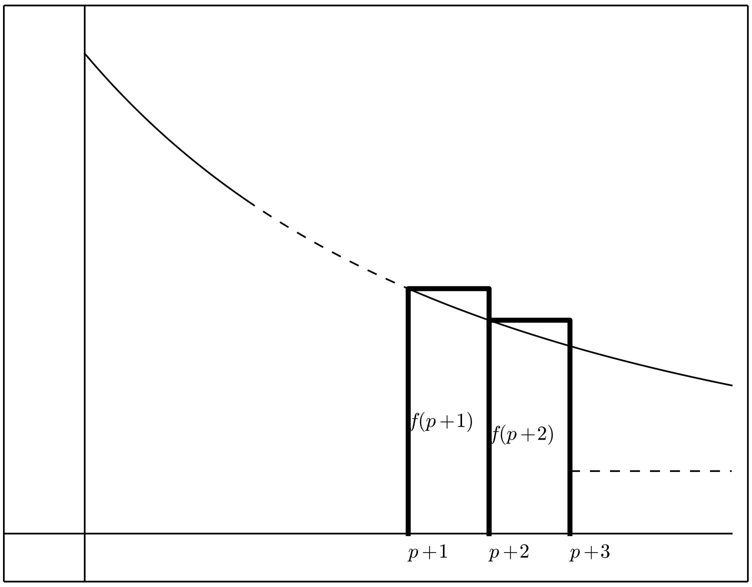
1.4 Equivalent du reste d'une série de Riemann convergente

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante.
On suppose que $\sum f(n)$ converge ou, ce qui revient au même, que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- $R_p \leq \displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$:



- $R_p \geq \int_{p+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$



Si on détaille :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
f est décroissante donc :
$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n) = \int_{n}^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Soit $p \in \mathbb{N}$.
$\forall n \geq p+1 \ \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Donc :
$\forall N \geq p+1 \ \sum_{n=p+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=p+1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=p+1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
D'où :
$\forall N \geq p+1 \ \int_{p}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=p+1}^{N} f(n) \geq \int_{p+1}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
On fait tendre N vers $+\infty$:
$\forall p \in \mathbb{N} \ \int_{p}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geq R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f(n) \geq \int_{p+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Passons au cas particulier des séries de Riemann :

Soit $\alpha > 1$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \int_p^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \geq R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_{p+1}^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_p^{+\infty} \geq R_p \geq \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{p+1}^{+\infty}$$

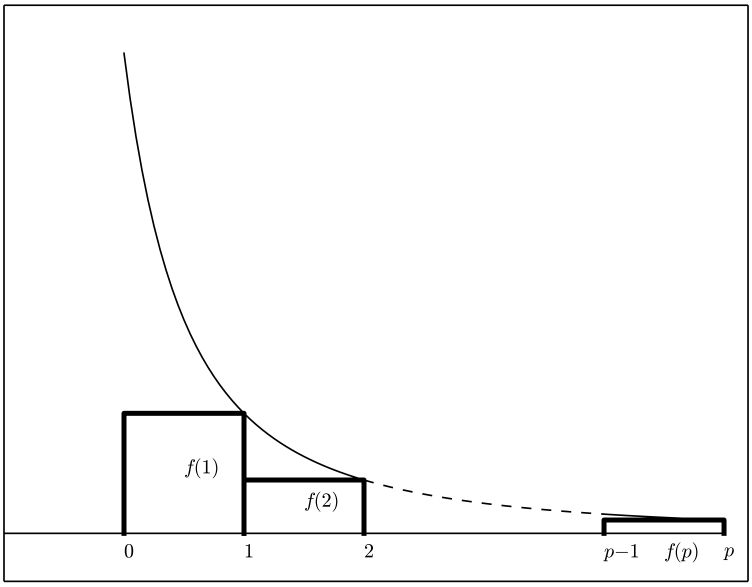
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{p^{\alpha-1}} \geq R_p \geq \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Finalement :

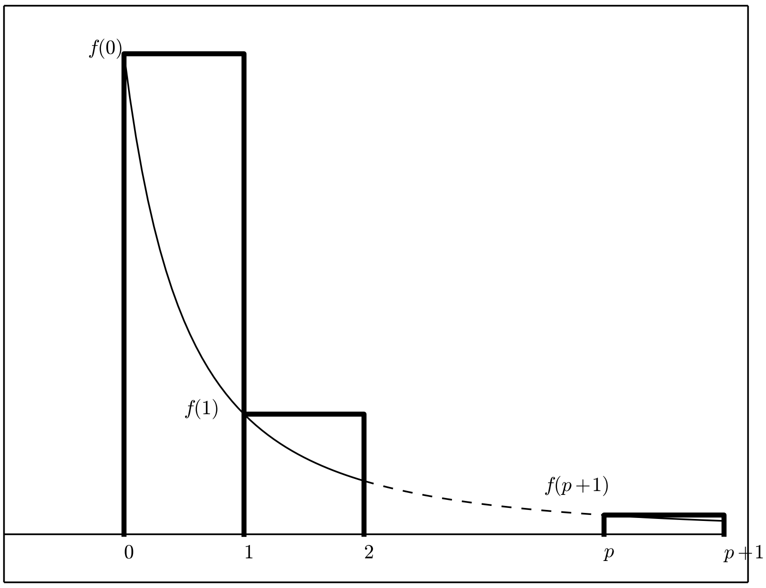
$$\forall \alpha > 1 \; R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$$

1.5 Equivalent des sommes partielles d'une série de Riemann divergente

- **Cas** $\alpha > 0$ ($\alpha \leq 1$)
  Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et décroissante.
  On suppose que $\sum f(n)$ diverge ou, ce qui revient au même, que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
  — $S_p \leq f(0) + \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$:



  — $S_p \geq \int_0^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$



Si on détaille :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
f est décroissante donc :
$\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n) = \int_{n}^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=1}^{p} f(n) \geq \sum_{n=1}^{p} \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Donc :
$\displaystyle\int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=1}^{p} f(n) \geq \int_{1}^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Par ailleurs, $f(0) \geq \displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ mais il n'y a pas de majoration de $f(0)$.
Donc :
$\displaystyle f(0) + \int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{n=0}^{p} f(n) \geq \int_{0}^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$ car f est positive
On aboutit à l'encadrement :
$\displaystyle\int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_p \leq f(0) + \int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t$ également valable pour $p = 0$.
On peut également écrire cet encadrement :
$\forall p \in \mathbb{N}\ 0 \leq S_p - \displaystyle\int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(0)$
Donc la suite $\displaystyle\left(S_p - \int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Donc $S_p - \displaystyle\int_{0}^{p} f(t)\,\mathrm{d}t = O(1) \quad (*)$
$\sum f(n)$ diverge avec $f(n) \geq 0$ donc $S_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ (ainsi que $\int_0^p f$).

Donc $S_p \sim \displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit $\alpha \in]0;1[$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \sim \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 1 \sim \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
En fait, en reprenant $(*)$, on montre :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(1)$
De même :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \sim \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln p$
et en reprenant $(*)$:
$\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} = \ln p + O(1)$
On peut aller plus loin :
La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\geq 1}$ converge.
On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2\ u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$u_n - u_{n-1} \sim -\dfrac{1}{2n^2} \leq 0$ et terme général d'une série convergente.
Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n - u_{n-1}$ converge et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
Sa limite s'appelle constante d'Euler et on la note γ ($\gamma \simeq 0,577\ldots$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Montrons que $\gamma \in [0;1]$.

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2\ u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \leq 1\\ &\quad \text{car } \frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 0\end{aligned}$$

On fait tendre n vers $+\infty$: $\gamma \leq 1$

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \geq \frac{1}{n}\\ &\quad \text{car } \frac{1}{k} - \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq 0\end{aligned}$$

On fait tendre n vers $+\infty$: $\gamma \geq 0$

Exemple d'application
Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$.
$\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \sim \dfrac{1}{k} \geq 0$ et $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.
Donc $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ diverge avec $\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geq 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
On peut chercher un équivalent de u_n.
On ne peut pas sommer les équivalents et écrire : $u_n \sim \displaystyle\sum_{k=?}^{n} \frac{1}{k}$.
Mais :

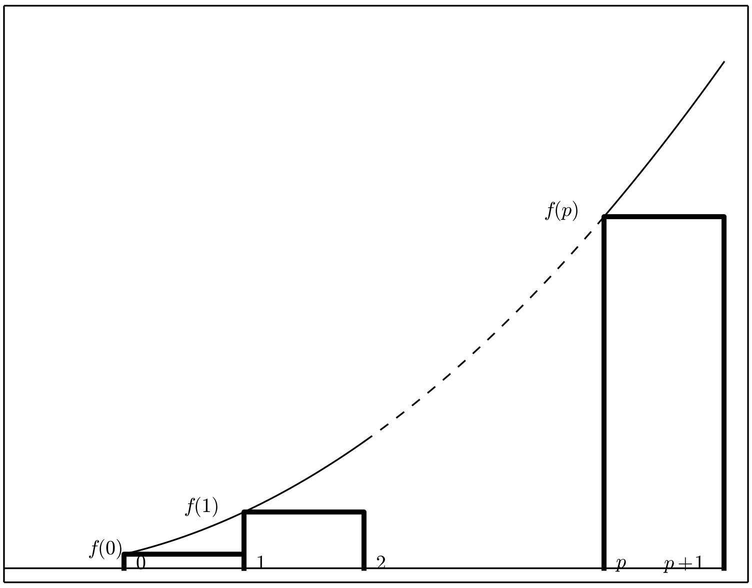
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &= \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{1+1/k^2}} = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{k}\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^3}\right)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{1}{k}$ converge absolument.
Donc $u_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 \in \mathbb{R}$
D'où :

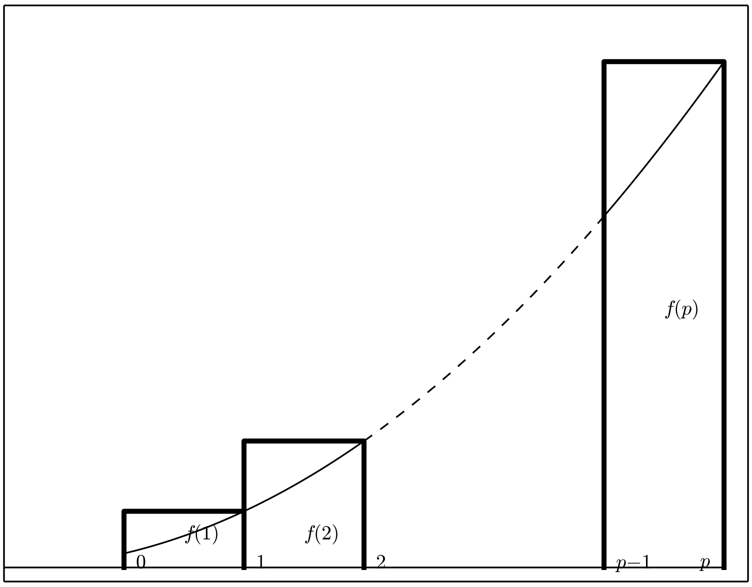
$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + l_1 + o(1) = \ln n + \gamma + l_1 + o(1) \\ &= \ln n + l + o(1) \text{ avec } l \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Finalement : $u_n \sim \ln n$

- **Cas** $\alpha \leq 0$
  Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et croissante.
  — $S_p \leq \displaystyle\int_0^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$:



— $S_p \geq f(0) + \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$:



De manière plus précise :
f est croissante donc :
$\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n) = \int_{n}^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$

D'où en sommant :
$\forall p \in \mathbb{N}^* \ \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{p} f(n) \leq \sum_{n=1}^{p} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
Par ailleurs, $f(0) \leq \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ donc :
$\forall p \in \mathbb{N}^* \ f(0) + \displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_p = \sum_{n=0}^{p} f(n) \leq \int_0^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
valable également si $p = 0$.
On n'a pas forcément $S_p \sim \displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$.
$S_p = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} f(n) = \sum_{n=0}^{p} \mathrm{e}^n = \frac{\mathrm{e}^{p+1}-1}{\mathrm{e}-1} \sim \frac{\mathrm{e}^{p+1}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\ \mathrm{e}^p$ avec $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \neq 1$
$\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^p - 1 \sim \mathrm{e}^p$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_-$ (si $\alpha < 0$, $f(x) = x^{-\alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum\limits_1^p = \sum\limits_0^p$)

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad 1 + \int_1^p x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{p+1} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$$
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad 1 + \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$1 - \alpha > 0$ donc $p^{1-\alpha} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ et :
$1 + \dfrac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} \sim \dfrac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ ainsi que $\dfrac{(p+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} \sim \dfrac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
Cela marche car $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ croît lentement.

Finalement :

$$\boxed{\forall \alpha \in]-\infty; -1[\quad \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

Appliquons ce qui précède à $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$.
Il a été demandé à l'oral de l'X en 2017 :
Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.
f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :
$\forall p \geq 2 \ f(1) + \displaystyle\int_1^p f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{p} f(n) \leq \int_1^{p+1} f(t)\,\mathrm{d}t$
$\forall p \geq 2 \ \displaystyle\int_1^p \ln t\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{p} \ln n \leq \int_1^{p+1} \ln t\,\mathrm{d}t$

$\forall p \geq 2\ 0 \leq \ln(p!) - [t\ln t - t]_1^p \leq \displaystyle\int_p^{p+1} \ln t \,\mathrm{d}t$
$\forall p \geq 2\ 0 \leq \ln(p!) - (p\ln p - p + 1) \leq \ln(p+1)$
$\forall p \geq 2\ 0 \leq \ln(p!) - (p\ln p - p) \leq 1 + \ln(p+1) \sim \ln p$
Donc $\ln(p!) - (p\ln p - p) + O(\ln p)$ et $\ln(p!) = p\ln p - p + O(\ln p)$
$p! = \exp(p\ln p - p + O(\ln p)) = \left(\dfrac{p}{\mathrm{e}}\right)^p \mathrm{e}^{O(\ln p)}$ ce qui ne permet pas d'obtenir un équivalent de $p!$.
Par contre :
$\dfrac{1}{n}\ln(n!) - \ln n + 1 = O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ et $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{n!}\ \mathrm{e}}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sqrt[n]{n!}\ \mathrm{e}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{\mathrm{e}}}$$

1.6 Formule de Stirling

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

La démonstration n'est pas exigible.

Centrale 2005

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. On cherche à démontrer cette formule en admettant la formule de Wallis :
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{((2^p)\,p!)^2}{(2p)!\,(2p)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}} \qquad \text{et } u_n = \ln a_{n+1} - \ln a_n$$
Montrer que la série de terme général u_n converge puis que la suite (a_n) converge vers un réel strictement positif l.
3. Calculer l en utilisant la formule de Wallis, en déduire la formule de Stirling.
4. Démontrer la formule de Wallis à partir d'une relation de récurrence sur la suite (I_n) des intégrales :
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

2.

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln a_{n+1} - \ln a_n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln k + n + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln (n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\
&= \ln (n+1) + 1 - \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln (n+1) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln n - \ln (n+1)) + 1 \\
&= -\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit classiquement que la série de terme général u_n converge absolument donc converge.
Donc la suite $(\ln(a_n))$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l = \mathrm{e}^{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$.

3. $\dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \neq 0$ donc $n! \sim \dfrac{l\, n^{n+1/2}}{\mathrm{e}^n} = l\, n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}$

$$\begin{aligned}
\frac{\left((2^p)\, p!\right)^2}{(2p)!\,(2p)^{1/2}} &\sim \frac{2^{2p} l^2 p^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-2p}}{l(2p)^{2p+1/2}\,\mathrm{e}^{-2p}(2p)^{1/2}} \\
&\sim \frac{2^{2p} l^2 p^{2p+1}}{l 2^{2p+1} p^{2p+1}} = \frac{l}{2}
\end{aligned}$$

D'où $\dfrac{l}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $l = \sqrt{2\pi}$

D'où $n! \sim \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

4.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1\ I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin t\, \sin^n t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\cos t \sin^n t\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\, n \cos t \sin^{n-1} t\,\mathrm{d}t \\
&= n \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-1} t\,\mathrm{d}t \\
&= n(I_{n-1} - I_{n+1})
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$
ou encore :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$
On en déduit classiquement :

$\forall p \in \mathbb{N}\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} I_0 \\ &= \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2\ 1}{(2p)^2(2p-2)^2\dots 2^2} I_0 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Si on note $v_p = \dfrac{((2^p)\,p!)^2}{(2p)!\,(2p)^{1/2}}$ dont on cherche la limite, on a $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{2p}}\,\dfrac{1}{v_p}$.
De même, $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$:

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} I_1 \\ &= \frac{(2p)^2(2p-2)^2\dots 2^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)\dots 2\ 3} I_1 \\ &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

On a donc :
$I_{2p+1} = \dfrac{1}{2p+1}\,\sqrt{2p}\,v_p$
D'où, après simplification :
$\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \dfrac{2p}{2p+1}\,\dfrac{2}{\pi}\,v_p^2$
puis $v_p^2 = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{2p+1}{2p}\,\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$
Mais $I_{2p} \geq I_{2p+1} \geq I_{2p+2}$.
En effet :
$\forall t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]\ \sin^{2p}(t) \geq \sin^{2p+1}(t) \geq \sin^{2p+2}(t)$ car $\sin(t) \in [0;1]$.
On en déduit :
$1 \geq \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \geq \dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \dfrac{2p+1}{2p+2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$
D'où $v_p^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ et comme $v_p \geq 0$:
$v_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

2 Séries alternées

2.1 Définition

On appelle série alternée toute série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où :

i $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in \mathbb{R}$

ii La suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Exemples

$\sum_{n\geq 0}(-1)^n$, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$

$\sum_{n\geq 2}\ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)$:

$u_n = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) < 0$ si n est impair.

$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$ si n est pair.

2.2 Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

De plus si on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ on a :

- S est du signe de u_0 et $|S| \leq |u_0|$.
- S est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, R_p (le reste d'ordre p) est du signe de u_{p+1} (le premier terme négligé) et
  $|R_p| \leq |u_{p+1}|$.
- De plus, si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, toutes les inégalités précédentes sont strictes.

Ce théorème ne signifie pas que toutes les séries alternées convergent : cf $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$.

Démonstration du théorème

Je vais démontrer l'essentiel du théorème.

Concernant la dernière remarque par exemple, je l'ai ajoutée car cela abrège la rédaction de certains exercices. Je n'en ferai pas de preuve détaillée : il suffit d'adapter celle sur les inégalités larges en étant attentif.

Je signale au passage que les inégalités sont aussi importantes en pratique que la convergence.

Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

On suppose d'abord :

$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = (-1)^n u_n \geq 0$

(en particulier $u_0 \geq 0$)

- $\forall k \in \mathbb{N}\ S_{2k+2} - S_{2k} = u_{2k+1} + u_{2k+2} = v_{2k+2} - v_{2k+1} \leq 0$
  car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  Donc la suite $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\forall k \in \mathbb{N}\ S_{2k+3} - S_{2k+1} = u_{2k+3} + u_{2k+2} = v_{2k+2} - v_{2k+3} \geq 0$
  car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  Donc la suite $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc les deux suites $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Donc :
$\exists l \in \mathbb{R}$ tq $S_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$ et $S_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$.
D'où $S_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} l$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et on a $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l$.

$(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers S et $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers S donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} S_{2k+1} &\leq S \leq S_{2k} \\ S_{2k+1} &\leq S \leq S_{2k+2} \end{aligned}$$

S est bien comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques.
En particulier, $S \geq S_1 = u_0 + u_1 = v_0 - v_1 \geq 0$ donc S a le signe de u_0.
On a $0 \leq S \leq u_0$ donc $|S| \leq u_0$.
On pourrait s'arrêter là, dire que le cas $(-1)^n u_n \leq 0$ se traite de manière similaire puis dire que R_p est lui-même la somme d'une série qui vérifie les bonnes hypothèses mais je trouve la démonstration qui suit éclairante.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
Si $p = 2k$, on a $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ donc $S_{2k+1} - S_{2k} \leq R_p \leq 0$ ie $u_{2k+1} \leq R_p \leq 0$.
R_p a bien le signe de u_{p+1} et $|R_p| \leq |u_{p+1}|$
Si $p = 2k+1$, on a $S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k+2}$ donc $0 \leq R_p \leq u_{p+1}$.
R_p a bien le signe de u_{p+1} et $|R_p| \leq |u_{p+1}|$

On traite de manière similaire le cas :
$\forall n \in \mathbb{N}\ (-1)^n u_n \leq 0$

2.3 Exemple

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cette question n'est pas mentionnée dans le programme mais est très classique.

- **Premier cas :** $\alpha \leq 0$
  $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.
- **Deuxième cas :** $\alpha > 0$
  — $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alternée.
  — La suite $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|\right)_{n\geq 1} = \left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.
  — $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  D'après le TSCSA, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Finalement :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 0$$

2.4 Remarque

Dans le théorème spécial des séries alternées si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est décroissante qu'au delà du rang n_0 on peut encore conclure à la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ mais la majoration du reste n'est valable que pour $n \geq n_0 - 1$ (ainsi que l'encadrement de la somme).

Exemple :
Nature $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$?
Soit $f \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x} \end{cases}$
f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[$ et :
$\forall x \in [1;+\infty[\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
Donc f est décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$.
On a :

- $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ est alternée.
- $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{\boxed{n\geq 3}}$ est décroissante [1]
- $(-1)^n \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ converge.

2.5 Exemple

Nature de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right)$? (TPE 99)

$$\begin{aligned}
u_n &= \cos\left(-\pi n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \quad \text{subtilité destinée à simplifier les calculs}\\
&= \cos\left(\pi n^2 \left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \cos\left(\pi n^2 \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&= \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{3n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{3}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède (application du théorème spécial des séries alternées), la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

1. avec une machine, on voit que $\dfrac{\ln 1}{1} = 0 < \dfrac{\ln 2}{2} \simeq 0,347 < \dfrac{\ln 3}{3} \simeq 0,366$

Par ailleurs une série dont le terme général est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.
Par linéarité, la série $\sum_{n\geq 2} \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$ converge.

3 Règle de d'Alembert

3.1 Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in [0;+\infty]$.
Alors :

- si $l < 1$ la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- si $l > 1$ la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
  Plus précisément, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
- si l = 1 on ne peut rien dire.

Remarque
On peut être tenté de déduire de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in]0;+\infty[$, $u_{n+1} \simeq l u_n$ puis $u_n \sim l^n$ ou $u_n \sim K l^n$.
C'est faux :
par exemple pour $u_n = 1, n$ ou $\frac{1}{n}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Si on a juste $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il est difficile de comparer u_n à l^n. Par contre, on peut comparer u_n à r^n avec $r \neq l$.

On suppose d'abord $l < 1$.
Soit $r \in]l;1[$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$
$\forall n \geq n_0$ $u_{n+1} \leq r u_n$ $(u_n \geq 0)$
D'où, par une récurrence élémentaire :
$\forall n \geq n_0$ $0 \leq u_n \leq u_{n_0} r^{n-n_0} = \frac{u_{n_0}}{r^{n_0}} r^n$.
Or $\sum r^n$ converge $(r < 1)$ donc $\sum u_n$ converge.

On suppose ensuite $l > 1$.
Soit $r \in]1;l[$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq r$
$\forall n \geq n_0$ $u_{n+1} \geq r u_n$ $(u_n \geq 0)$
D'où, par une récurrence élémentaire :
$\forall n \geq n_0$ $u_n \geq u_{n_0} r^{n-n_0} = \frac{u_{n_0}}{r^{n_0}} r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $r > 1$.
Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ("vite")

Examinons enfin le cas $l = 1$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{n}$
  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum u_n$ diverge.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = \dfrac{1}{n^2}$

  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum u_n$ converge.

3.2 Exemples d'applications

- Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n}$?

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = \dfrac{1}{n3^n} > 0$

  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3} < 1$

  Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n3^n}$ converge.

- Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+5}{7^n}$?

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = \dfrac{n^2+3n+5}{7^n} > 0$

  $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2+3(n+1)+5}{n^2+3n+5}\dfrac{7^n}{7^{n+1}} \sim \dfrac{n^2}{n^2}\dfrac{1}{7} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{7} < 1$

  Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3n+5}{7^n}$ converge.

- **CCP 99 :**

  Nature de la série de terme général $\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$?

  $\forall n \geq 2 \; u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!} > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(\ln n)^n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}\left(\frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^n \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}\exp\left(n\left(\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1}\exp\left(\frac{1}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

  On en déduit : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ donc la série de terme général $\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$ converge.

3.3 Remarque

Par le biais de la convergence absolue, on peut étendre la règle de d'Alembert aux suites complexes (ou réelles de signe quelconque) :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^*$.
On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in [0;+\infty]$.
Alors :

- si $l<1$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument donc converge.
- si $l>1$ $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
- si l = 1 on ne peut rien dire.

Il suffit de remarquer $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ et d'appliquer la règle de D'Alembert du paragraphe 2.3.1 à la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$.

Exercice 1 *(X 2014)*

Soit $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$.

1. Etudier (u_n).
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.
   Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$?

Exercice 2 *(Mines 2019)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un réel quelconque.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(a-\dfrac{1}{n}\right) - 2f(a)$?

Exercice 3 *(Centrale 2019)*

Convergence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.