ANALYSE 1
2025-2026
Correction
Correction des exercices du deuxième chapitre du cours

941

Exercice 1 *(X 2014, Mines 2024)*

Soit $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n$.

1. Etudier (u_n).
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.
   Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$?

Correction

1.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \end{aligned}$$

   (u_n) converge vers 1.

2. $v_n \sim \dfrac{1}{n\,\ln n} \geq 0$ et $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge (cf 2.1.3) pour les détails donc $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ diverge.

Exercice 2 *(Mines 2019)*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un réel quelconque.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = f\left(a + \dfrac{1}{n}\right) + f\left(a - \dfrac{1}{n}\right) - 2f(a)$?

Correction

$u_n = f(a) + f'(a)\dfrac{1}{n} + f(a) - f'(a)\dfrac{1}{n} - 2f(a) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
La série converge absolument.

Exercice 3 *(Centrale 2019)*

Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = (n+1)^{-1/2} - 2(n+1)^{1/2} + 2n^{1/2} \\
&= n^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2n^{1/2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + 2n^{1/2} \\
&= n^{-1/2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2n^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2n^{1/2} \\
&= O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument.
Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.