ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 2
Séries de nombres réels ou complexes

941

1 Natures de séries

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ (CCP 2002)
2. $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ (Mines 2008)
3. $\sum \tan\left(\frac{\pi}{4}\times\frac{n}{n+1}\right)-\tanh\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)$ (Mines 2016)

Exercice 2 *(Mines 2016)*

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$.
Donner une CNS sur (a,b) pour que la série de terme général u_n converge.

Exercice 3 *(Centrale 2012)*

Nature de la série de terme général $u_n=\sqrt{\ln(n^2+1)}-\sqrt{\ln(n^2+1/2)}$?

Exercice 4 *(Mines 2019)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$u_0\in\mathbb{R}$
$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$

1. Nature de $\sum u_n$?
2. Nature de $\sum (-1)^n u_n$?

Exercice 5 *(Mines 2015)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- $u_0 > 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent simple de u_n.
3. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.
4. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$.

Exercice 6 *(Centrale 2014)*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Déterminer la nature de $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$.
   (a) Discuter la nature de $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ suivant la valeur de α.
   (b) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 *(X 2016)*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 8 *(Mines 2004)*

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(2\pi.\,\mathrm{e}.n!)}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 Sommes de séries

Exercice 9

Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$ et calculer sa somme.

Exercice 10 *(Centrale 2013)*

Soit $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   A l'aide de $(n+1)^4 - n^4$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.
3. On rappelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

Exercice 11 *(CCP 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On pourra utiliser $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. Etudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Pour $n \geq 3$, comparer u_n et $\dfrac{1}{n}$.
   Quelle est la nature de $\sum u_n$? de $\sum v_n$?
3. Pour $n \geq 3$, exprimer $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une seule somme.
   A l'aide d'une comparaison série intégrale, montrer :
   $\forall n \geq 3 \ \dfrac{(\ln(2n+1))^2}{2} - \dfrac{(\ln(n+1))^2}{2} \leq S_{2n} - S_n \leq \dfrac{(\ln(2n))^2}{2} - \dfrac{(\ln(n))^2}{2}$
4. Montrer :
   $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \dfrac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$
5. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de S_n et de H_n.
   Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

3 Séries et intégrales

Exercice 12 *(X 2016)*

Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.
$f(r) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-r}$.
f est-elle bien définie ?
Montrer : $f(r) = 1 + O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^r}\right)$

Exercice 13 *(Mines 2015)*

Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)}$?

4 Recherche d'équivalents

Exercice 14 *(Centrale 2015)*

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3}{4}$

1. Convergence ? limite l ?
2. Equivalent de $u_n - l$?

5 Divers

Exercice 15 *(Centrale 2015)*

On considère la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R})\ u_{n+2} = (4n+6)u_{n+1} + u_n$$

On note S l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence $(\mathcal{R})$.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de S vérifiant en outre :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \\ b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \end{cases}$$

1. Donner la structure de S.
   Que peut-on dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ et $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.