ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 2
Séries de nombres réels ou complexes
Correction

941

1 Natures de séries

Exercice 1

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$ (CCP 2002)

   Correction

   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \cos\left(\frac{1}{n}\right) \geq \cos(1) > 0$

   Donc u_n est bien défini pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{n^{\alpha-2}}{2} + o\left(n^{\alpha-2}\right)\end{aligned}$$

   - **Premier cas :** $\alpha < 2$

     $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: la série diverge grossièrement.
   - **Deuxième cas :** $\alpha = 2$

     $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1/2}$: la série diverge grossièrement.
   - **Troisième cas :** $\alpha > 2$

     $2\ln n + \ln(u_n) = -\frac{n^{\alpha-2}}{2} + o\left(n^{\alpha-2}\right) + 2\ln n$ et $\ln n = o\left(n^{\alpha-2}\right)$ car $\alpha - 2 > 0$

     $2\ln n + \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

     $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

     La série converge (absolument).

     Autre méthode

     On vérifie comme ci-dessus que u_n est bien défini pour $n \geq 1$.

$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha < 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ ?? \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$

On peut déjà affirmer que si $\alpha \leq 0$ la série diverge grossièrement.
On suppose désormais $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^\alpha \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n^\alpha\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{n^{\alpha-2}}{2} + o\left(n^{\alpha-2}\right)\right) \end{aligned}$$

Si $\alpha < 2$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la série diverge grossièrement.
Si $\alpha = 2$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$ et la série diverge grossièrement.
On suppose désormais $\alpha > 2$.
$n^2 u_n = \exp\left(2\ln(n) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + o\left(n^{\alpha-2}\right)\right)$ avec $\ln n = o\left(n^{\alpha-2}\right)$ car $\alpha - 2 > 0$
Donc $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
La série converge (absolument).

2. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$ (Mines 2008)
Correction
- **Premier cas :** $\alpha < 0$
  $1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} = 1 + (-1)^n n^{-\alpha} + n^{-2\alpha}$ avec $0 < -\alpha < -2\alpha$ donc :
  $1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} \sim n^{-2\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
  La suite (u_n) est définie à partir d'un certain rang et la série de terme général u_n diverge grossièrement.
- **Deuxième cas :** $\alpha = 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} = 2 + (-1)^n > 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{2n} = \ln 3$
  La série de terme général u_n diverge grossièrement.
- **Troisième cas :** $\alpha > 0$

$1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+\dfrac{1}{n^{2\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: la suite (u_n) est définie à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\end{aligned}$$

$u_n-\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\sim\dfrac{1}{2n^{2\alpha}}\geq 0$

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ($\alpha>0$+ TSCSA) donc :

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} &\iff \sum u_n-\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge}\\ &\iff \sum\frac{1}{2n^{2\alpha}} \text{ converge}\\ &\iff \alpha>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Remarque

On peut aborder l'exercice différemment.

On cherche à préciser le comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$.

On regarde donc le comportement de $1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, ce qui amène à distinguer plusieurs cas en fonction du signe de α.

On montre comme ci-dessus que la série diverge pour $\alpha\leq 0$.

Dans le cas $\alpha>0$, on a l'équivalent $u_n\sim\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Que peut-on en déduire ?

$|u_n|\sim\dfrac{1}{n^\alpha}$ donc :

Si $\alpha>1$ alors $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Si $\alpha\in]0;1]$, $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

On a $(-1)^n u_n\sim\dfrac{1}{n^\alpha}\geq 0$ donc $(-1)^n u_n\geq 0$ à partir d'un certain rang : la série est alternée à partir d'un certain rang.

Comme on est dans le cas $\alpha>0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Peut-on utiliser le théorème spécial sur la convergence des séries alternées ?

$$\begin{aligned} |u_{n+1}|-|u_n| &= (-1)^{n+1}u_{n+1}-(-1)^n u_n=(-1)^{n+1}\left(u_{n+1}+u_n\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}-\frac{1}{2(n+1)^{2\alpha}}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}+\frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\\ &= (-1)^{n+1}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right)+\frac{1}{2n^{2\alpha}}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\end{aligned}$$

Si $\alpha>1$ alors $\alpha+1<2\alpha$ et $|u_{n+1}|-|u_n|\sim-\dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}\leq 0$: on peut dans ce cas appliquer le TSCSA mais on va bien plus vite avec la convergence absolue.

Si $\alpha = 1$, il faudrait pousser le développement asymptotique plus loin.
Si $\alpha \in]0;1[$, $2\alpha < \alpha + 1$ donc $|u_{n+1}| - |u_n| \sim \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{2\alpha}}$ qui n'est pas de signe constant.
La suite $(|u_n|)$ n'est pas monotone.

3. $\sum \tan\left(\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{n}{n+1}\right) - \tanh\left(\dfrac{(n+1)^2}{n}\right)$ (Mines 2016)

Correction

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{n}{n+1}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{1+1/n}\right) \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4} \times \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Avec la formule de Taylor-Young, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + O(h^2)$ donc :
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{n}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned}
\tanh\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right) &= \tanh\left(n + 2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{n+2+1/n} - \mathrm{e}^{-n-2-1/n}}{\mathrm{e}^{n+2+1/n} + \mathrm{e}^{-n-2-1/n}} \\
&= \frac{1 - \mathrm{e}^{-2n-4-2/n}}{1 + \mathrm{e}^{-2n-4-2/n}} \\
&= \left(1 - \mathrm{e}^{-2n-4-2/n}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-2n-4-2/n} + o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)\right) \\
&= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$u_n = -\dfrac{\pi}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
La série de terme général $-\dfrac{\pi}{2n}$ diverge.
Si $v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors la série de terme général v_n converge absolument donc converge.
Finalement $\sum \tan\left(\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{n}{n+1}\right) - \tanh\left(\dfrac{(n+1)^2}{n}\right)$ diverge.

Exercice 2 *(Mines 2016)*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Donner une CNS sur (a, b) pour que la série de terme général u_n converge.

Correction

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1+a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+b\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(1+a+b+\frac{a/2+b}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (1+a+b)\sqrt{n}+\frac{a+2b}{2\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

- Si $a+b+1\neq 0$ alors u_n tend vers l'infini avec le signe de $a+b+1$.
  Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a+b+1=0$ et $a+2b\neq 0$ alors $u_n\sim\dfrac{a+2b}{\sqrt{n}}$ de signe constant.
  Donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a+b+1=a+2b=0$ alors $u_n=O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
  Donc la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Finalement :
$$\sum u_n \text{ converge} \iff \begin{cases} a+b=-1 \\ a+2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Exercice 3 *(Centrale 2012)*

Nature de la série de terme général $u_n=\sqrt{\ln(n^2+1)}-\sqrt{\ln(n^2+1/2)}$?

Correction
u_0 n'est pas défini mais pour tout $n\geq 1$, u_n est bien défini.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}-\left(2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\right)^{1/2} \\ &= \left(2\ln(n)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}-\left(2\ln(n)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} \\ &= (2\ln(n))^{1/2}\left(\left(1+O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^{1/2}-\left(1+O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^{1/2}\right) \\ &= (2\ln(n))^{1/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)-1\right)=O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{\ln(n)}}\right) \\ &= o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Une autre méthode est possible.
On remarque que $u_n=f(n^2+1)-f\left(n^2+\dfrac{1}{2}\right)$ avec $f\begin{cases}[1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{\ln(x)}\end{cases}$.
Avec les accroissements finis, on a :
$\forall n\in\mathbb{N}^*\exists x_n\in\left[n^2+\dfrac{1}{2};n^2+1\right]$ tq $u_n=\left(n^2+1-\left(n^2+\dfrac{1}{2}\right)\right)f'(x_n)=\dfrac{1}{4x_n\sqrt{\ln(x_n)}}$
$x_n\sim n^2$ donc $u_n\sim\dfrac{1}{4\sqrt{2}n^2\sqrt{\ln(n)}}$ et on conclut avec $u_n=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4 *(Mines 2019)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$u_0 \in \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$

1. Nature de $\sum u_n$?
2. Nature de $\sum (-1)^n u_n$?

Correction

1. Il n'y a aucun problème de définition.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} > 0$
   On en déduit :
   $\forall n \geq 2\ 0 \leq u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$
   Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   D'où $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.
   $\sum u_n$ diverge.
2. $\forall n \geq 2\ 0 \leq u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $u_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
   $\sum (-1)^n u_n$ converge.
   Remarque
   Pourquoi utilise-t-on un développement asymptotique et non le TSCSA ?
   La décroissance de (u_n) paraît difficile à prouver alors que le développement asymptotique fournit rapidement la réponse.
   Toutefois, on peut prouver la décroissance de $(u_n$ à partir d'un certain rang, ce qui permet d'utiliser le TSCSA :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{1}{n-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

   Donc $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{1}{n^2} \leq 0$ et $u_{n+1} - u_n \leq 0$ à partir d'un certain rang.

Exercice 5 *(Mines 2015)*

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

- $u_0 > 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner un équivalent simple de u_n.
3. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.
4. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$.

Correction
Il est tentant d'utiliser les méthodes d'étude des suites récurrentes mais cela complique la résolution de l'exercice. Il vaut mieux remarquer ici :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}^2 = 1 + u_n^2$.
On démontre donc d'abord par récurrence que la suite est bien définie, à valeurs strictement positives.
On utilise ensuite la remarque précédente pour obtenir :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sqrt{n+u_0^2}$
On en déduit immédiatement :

1. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
2. $u_n \sim \sqrt{n}$
3. $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ donc la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ diverge.
4. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*\ \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+u_0^2}} \leq \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+u_0^2}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+u_0^2}}$

   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\ \int_0^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+u_0^2}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_0} + \int_0^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+u_0^2}}$

   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\ 2\sqrt{n+1+u_0^2} - 2u_0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_0} + 2\sqrt{n+u_0^2} - 2u_0$

   On en déduit :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \sim 2\sqrt{n}$

Exercice 6 *(Centrale 2014)*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Déterminer la nature de $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^\alpha u_n$.
   (a) Discuter la nature de $\sum (\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$ suivant la valeur de α.
   (b) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc converge.
   $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+.$
2. $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\dfrac{2n+2}{2n+5}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{3}{2n+5}\right) \sim -\dfrac{3}{2n} \leq 0$
   Donc $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge.
   Donc la suite $(\ln(u_n))$ diverge.
   Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \dfrac{2n+2}{2n+5}$

$$\begin{aligned}\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{2n+5}\right)\\ &= \frac{\alpha}{n} - \frac{3}{2n+5} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{(2\alpha-3)n+5\alpha}{n(2n+5)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

   Si $\alpha \neq \dfrac{3}{2}$ alors $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \sim \dfrac{2\alpha-3}{2n}$ et $(\ln(v_n))$ diverge.
   Si $\alpha = \dfrac{3}{2}$ alors $(\ln(v_n))$ converge.
   $u_n \sim \dfrac{K}{n^{3/2}}.$
   Remarque
   Une autre méthode est possible :
   $$u_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=2}^{n+1} 2k+1} = 6\ 2^{2n}\ \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)!} \sim \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\ \frac{1}{n^{3/2}}$$
   En tous cas, la série de terme général u_n converge.

Exercice 7 *(X 2016)*

Soit $(u_n)_{n\geq1}$ une suite de réels positifs telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$
Montrer que la série de terme général u_n converge.

Correction
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} u_k \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} u_k$
On note, pour $p \in \mathbb{N}$, $v_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^p} u_k$

$\forall p \in \mathbb{N}\ v_{p+1} \leq \left(1+\dfrac{1}{2^p}\right) v_p$
On en déduit :
$\forall p \in \mathbb{N}\ v_p \leq v_0 \displaystyle\prod_{l=0}^{p-1}\left(1+\frac{1}{2^l}\right) = v_0 \exp\left(\sum_{l=0}^{p-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^l}\right)\right) \leq v_0 \exp\left(\sum_{l=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^l}\right)\right) = M \in \mathbb{R}$
On en déduit que la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est majorée :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N \leq 2^p$.
$(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs positives donc :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n \leq v_p \leq M$
$\sum u_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 *(Mines 2004)*

Etude de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(2\pi.\,\mathrm{e}.n!)}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction
Par application de la formule de Taylor avec reste intégral, on a :
$\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$2\pi\,\mathrm{e}n! = 2\pi \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \frac{2\pi}{n+1} + \frac{2\pi}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$
$\forall k \in [\![0;n]\!]\ \dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$
Donc :
$u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \sin\left(\dfrac{2\pi}{n+1} + \dfrac{2\pi}{n+1}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$
$0 \leq \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+2}$
Donc $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^\alpha}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{2\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\sim \frac{2\pi}{n^{\alpha+1}} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit :
$\sum u_n$ converge $\iff \alpha > 0$

2 Sommes de séries

Exercice 9

Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$ et calculer sa somme.

Correction

On va prouver la convergence et calculer la somme simultanément.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_n &= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$\forall p \in \mathbb{N}^* \ S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n = \tan(1) - \tan\left(\dfrac{1}{p+1}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \tan(1).$

Donc la série converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)} = \tan(1)$$

Exercice 10 *(Centrale 2013)*

Soit $u_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On donne $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   A l'aide de $(n+1)^4 - n^4$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.
3. On rappelle $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

   Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 \geq n^3$

   Donc :

   $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^3}$

   Donc a série de terme général u_n converge.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (la technique est classique)
3. $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2\\ &= 4\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= 4\left(\frac{\pi^2}{6} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi^2}{6} - 1\right)\\ &= 4\left(\frac{\pi^2}{3} - 1 - 2\right)\\ &= \frac{4(\pi^2-9)}{3}\end{aligned}$$

Exercice 11 *(CCP 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $v_n = (-1)^n u_n$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
On pourra utiliser $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. Etudier les variations de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. Pour $n \geq 3$, comparer u_n et $\dfrac{1}{n}$.
   Quelle est la nature de $\sum u_n$? de $\sum v_n$?
3. Pour $n \geq 3$, exprimer $S_{2n} - S_n$ sous la forme d'une seule somme.
   A l'aide d'une comparaison série intégrale, montrer :
   $\forall n \geq 3\ \dfrac{(\ln(2n+1))^2}{2} - \dfrac{(\ln(n+1))^2}{2} \leq S_{2n} - S_n \leq \dfrac{(\ln(2n))^2}{2} - \dfrac{(\ln(n))^2}{2}$
4. Montrer :
   $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \dfrac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)$
5. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de S_n et de H_n.
   Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Correction

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et :
   $\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
   Donc f est croissante sur $]0;\mathrm{e}]$ puis décroissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$.
2. $\forall n \geq 3\ u_n \geq \dfrac{1}{n} \geq 0$
   $\sum u_n$ diverge.
   - $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ est alternée.

- $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{\boxed{n \geq 3}}$ est décroissante [1]
- $(-1)^n \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

3. $\forall n \geq 3$ $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$
$n \geq 3$ donc si $k \geq n+1 \geq 4$, f est décroissante sur $[k-1; k]$ et sur $[k; k+1]$.
On en déduit :
$\forall n \geq 3$ $\forall k \geq n+1$ $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
D'où en sommant :
$\forall n \geq 3$ $\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq S_{2n} - S_n \leq \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
Le reste est du calcul de primitive.

4.
$$\begin{aligned}
\frac{(\ln(2n))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} &= \frac{(\ln(2) + \ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&= \frac{(\ln(n))^2 + 2\ln(2)\ln(n) + (\ln(2))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&= \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(\ln(2n+1))^2}{2} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} &= \frac{(\ln(2) + \ln(n) + \ln(1+1/(2n)))^2}{2} - \frac{(\ln(n) + \ln(1+1/n))^2}{2} \\
&= \frac{(\ln(n))^2 + 2\ln(2)\ln(n) + (\ln(2))^2 + o(1)}{2} - \frac{(\ln(n)^2) + o(1)}{2} \quad \text{à détaille} \\
&= \ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. $S_{2n} + T_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} = S_n + H_n \ln(2)$
On en déduit :

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= S_n + H_n\ln(2) - S_{2n} = \ln(2)(\ln(n) + \gamma + o(1)) - \left(\ln(2)\ln(n) + \frac{(\ln(2))^2}{2} + o(1)\right) \\
&= \ln(2)\left(\gamma - \frac{\ln(2)}{2}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

On conclut facilement.

3 Séries et intégrales

Exercice 12 *(X 2016)*

1. avec une machine, on voit que $\frac{\ln 1}{1} = 0 < \frac{\ln 2}{2} \simeq 0,347 < \frac{\ln 3}{3} \simeq 0,366$

Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.
$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-r}$.
f est-elle bien définie ?
Montrer : $f(r) = 1 + O_{+\infty}\left(\frac{1}{2^r}\right)$

Correction
L'existence relève du cours dès que $r > 1$.
D'autre part une comparaison série-intégrale classique donne :
$0 \leq \sum_{3}^{+\infty} k^{-r} \leq \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} = \frac{2^{1-r}}{r-1} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{2^r}\right)$
D'où : $f(r) = 1 + 2^{-r} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{2^r}\right)$

Exercice 13 *(Mines 2015)*

Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)}$?

Correction
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)}$.
On fait le changement de variable : $t = x + n\pi$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(x+n\pi)\sin^2(x)}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh((n+1)\pi)\sin^2(x)} \leq u_n \leq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(n\pi)\sin^2(x)}$
Soit $a > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin^2 x} &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin^2 x} \quad (f(\pi - x) = f(x)) \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a\dfrac{t^2}{1+t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow\!\!\nearrow\ t = \tan x \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+at^2} = \frac{2}{1+a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}\right)^2 + t^2} \\
&= \frac{2}{1+a}\left[\sqrt{1+a}\arctan\left(t\sqrt{1+a}\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1+a}}
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{\pi}{\sqrt{1+\cosh((n+1)\pi)}} \leq u_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+\cosh(n\pi)}}$
$\frac{\pi}{\sqrt{1+\cosh(n\pi)}} \sim \pi\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-n\pi/2}$ terme général d'une série convergente.
On en déduit que la série de terme général u_n converge.
Si on note S sa somme alors :

$\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} S.$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+\cosh(t)\sin^2(t)}$ est positive donc :

$\displaystyle\int_0^{T} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

En particulier :

$\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$

Par unicité de la limite $\lambda = l \in \mathbb{R}$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cosh(t)\sin^2(t)}$ converge.

Remarque

On peut se passer du calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin^2 x}$.

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh((n+1)\pi)\sin^2(x)} \leq u_n \leq \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(n\pi)\sin^2(x)}$

qui donne par symétrie :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh((n+1)\pi)\sin^2(x)} \leq u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(n\pi)\sin^2(x)}$

$\forall t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$

Donc la fonction sin est concave sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Elle est donc sous ses tangentes et au dessus de ses cordes. On en déduit l'encadrement :

$\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh((n+1)\pi)x^2} \leq u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cosh(n\pi)\frac{4}{\pi^2}x^2}$

Or :

$\forall a > 0$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2x^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan(ax)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{a\pi}{2}\right)$

On en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq \dfrac{\pi^2}{2\sqrt{\cosh(n\pi)}}$

D'où $u_n = O\left(\mathrm{e}^{-n\pi/2}\right)$.

4 Recherche d'équivalents

Exercice 14 *(Centrale 2015)*

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+3}{4}$

1. Convergence ? limite l ?
2. Equivalent de $u_n - l$?

Correction

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ donc on peut supposer $u_0 \in \mathbb{R}_+$. Il n'y a aucun problème de définition et :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 0$.
   Quelques calculs préliminaires
   - $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) - x = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{4} = \dfrac{(x-2)^2 - 1}{4} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{4}$
   - f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et le tableau de variations est facile à construire.

   Discussion
   - **Premier cas :** $u_0 \in [0;1[$
     $[0;1[$ est stable par f.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in [0;1[$.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$
     (u_n) est croissante et majorée donc converge vers $l \in [0;1]$ tel que $f(l) = l$.
     Finalement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
   - **Deuxième cas :** $u_0 = 1$
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
   - **Troisième cas :** $u_0 \in]1;3[$
     $]1;3[$ est stable par f.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in]1;3[$.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$
     (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers $l \in [1;3[$ tel que $f(l) = l$.
     Finalement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
   - **Quatrième cas :** $u_0 = 3$
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$
   - **Cinquième cas :** $u_0 > 3$
     $]3;+\infty[$ est stable par f.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 3$.
     $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$
     (u_n) est croissante. Si elle est majorée, elle converge vers $l > 3$ tel que $f(l) = l$.
     C'est absurde Finalement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

   La remarque initiale est incomplète, il faut déterminer pour quelles valeurs de $u_0 \in \mathbb{R}_-$ la suite converge.
   - **Premier cas :** $u_0 \in]-3;3[$
     $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
   - **Deuxième cas :** $u_0 = \pm 3$
     $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$
   - **Troisème cas :** $|u_0| > 3$
     $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
2. Le cas $u_0 = \pm 3$ est clair :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n - l = 0$.
   On suppose donc $|u_0| < 3$ et on pose $u_n = 1 + \epsilon_n$ avec $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
1 + \epsilon_{n+1} &= \frac{(1+\epsilon_n)^2 + 3}{4} = \frac{4 + 2\epsilon_n + \epsilon_n^2}{4} \\
\epsilon_{n+1} &= \frac{1}{2}\epsilon_n + \frac{1}{4}\epsilon_n^2
\end{aligned}$$

On pose $v_n = 2^n \epsilon_n$.

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & 2^{n+1}\epsilon_{n+1} \\ & = & 2^n \epsilon_n + 2^{n-1}\epsilon_n^2 \\ & = & v_n + 2^{n-1}\epsilon_n^2 \\ v_{n+1} - v_n & = & 2^{n-1}\epsilon_n^2 \end{array}$$

Le cas $u_0 = \pm 1$ est clair :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n - l = 0$.
On suppose donc $u_0 \neq \pm 1$.
Il résulte alors de la première question :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \epsilon_n \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{2^n \epsilon_{n+1}^2}{2^{n-1}\epsilon_n^2} & = & 2\left(\dfrac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}\right)^2 \\ & \sim & 2\left(\dfrac{1/2\epsilon_n}{\epsilon_n}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

On déduit alors de la règle de D'Alembert que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.
Donc la suite (v_n) converge et $2^n \epsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$.
Mais cela ne fournit un équivalent que si $\lambda \neq 0$.
Si $u_0 > 1$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n > 0$

$$\begin{array}{rcl} \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) & = & \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) \\ & = & \ln\left(\dfrac{2\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}\right) = \ln\left(\dfrac{\epsilon_n + 1/2\epsilon_n^2}{\epsilon_n}\right) \\ & = & \ln\left(1 + \dfrac{\epsilon_n}{2}\right) = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right) \end{array}$$

Cette fois, on a la convergence de la suite $(\ln(v_n))$ et on conclut :
$u_n - 1 \sim \dfrac{\lambda}{2^n}$
Il ne paraît pas possible d'expliciter λ (c'est d'ailleurs une fonction de u_0).
Si $0 < u_0 < 1$ alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ v_n < 0$
et on considère $\ln(-v_n)$ et on aboutit à la même condition.

5 Divers

Exercice 15 *(Centrale 2015)*

On considère la relation de récurrence :

$$(\mathcal{R})\ u_{n+2} = (4n+6)u_{n+1} + u_n$$

On note S l'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence $(\mathcal{R})$.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de S vérifiant en outre :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \\ b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \end{cases}$$

1. Donner la structure de S.
   Que peut-on dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ et $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

1. • $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   • La suite nulle appartient à S.
   • S est stable par combinaisons linéaires :
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites appartenant à S et λ et μ deux réels. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{rcl}\forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+2} & = & \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ & = & \lambda\left((4n+6)u_{n+1} + u_n\right) + \mu\left((4n+6)v_{n+1} + v_n\right) \\ & = & (4n+6)\left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + \lambda u_n + \mu v_n \\ & = & (4n+6)w_{n+1} + w_n\end{array}$$

   Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.

   Soit $\Phi \begin{cases} S \to \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)\end{cases}$.
   On vérifie facilement que Φ est linéaire.
   Une suite de S est entièrement définie par la donnée de ses deux premiers termes donc tout élément de $\mathbb{R}^2$ possède un et un seul antécédent par Φ. En d'autres termes Φ est une bijection.
   Φ est donc un isomorphisme de S sur $\mathbb{R}^2$.
   On en déduit que S est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

   $\Phi\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (1,0)$ et $\Phi\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ (la base canonique) donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.

2.

$$\begin{array}{rcl}\forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+1} & = & a_{n+1}b_{n+2} - a_{n+2}b_{n+1} \\ & = & a_{n+1}\left((4n+6)b_{n+1} + b_n\right) - \left((4n+6)a_{n+1} + a_n\right)b_{n+1} \\ & = & a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} \\ & = & -w_n\end{array}$$

   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^n$
   Une récurrence triviale permet de montrer :
   $\forall n \geq 1\ b_n \geq 1$
   On en déduit (avec $b_0 = 0$ dans le cas $n = 0$) :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ b_{n+2} \geq 4n + 6 = 3(n+2) + n \geq 3(n+2)$
   D'où :
   $\forall n \geq 2\ b_n \geq 3n$
   On en déduit :
   $\forall n \geq 2\ \left|\dfrac{w_n}{b_n b_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{b_n b_{n+1}} \leq \dfrac{1}{9n^2}$

On en déduit que la série de terme général $\frac{w_n}{b_n b_{n+1}}$ converge absolument donc converge.
Mais :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = q_n - q_{n+1}$
donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.