TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 2
Limites dans un espace vectoriel normé

941

1 Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 1 *(Mines 2013)*

Montrer que $z \mapsto \dfrac{2z+1}{z+2}$ est une bijection du disque unité fermé D de $\mathbb{C}$ sur lui même.
Étudier la suite (z_n) définie par $z_0 \in D$ et $z_{n+1} = f(z_n)$.

Exercice 2 *(Centrale 2013)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n \ln(x) = 1$.

1. Montrer qu'elle admet une unique solution que l'on notera α_n.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \alpha_n > 1$
3. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
4. Calcul de l.
5. Montrer que $\alpha_n - l \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 3 *(X 2021)*

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n + X^2 + X - 1$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$, notée r_n.
2. Montrer que la suite (r_n) est bornée.
3. Montrer que la suite (r_n) est convergente et déterminer sa limite l.
4. Equivalent de $r_n - l$.

Exercice 4 *(CCP 2022)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \dfrac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$m_n = \min(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$
$M_n = \max(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$

1. On suppose dans cette question que $p = 2$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose que les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}(i+1)u_{n+i}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. Montrer :
   $m_n \leq m_{n+1} \Longleftrightarrow u_{n+p} \geq m_n$
   En déduire que la suite (m_n) est croissante.
5. Je n'ai pas l'énoncé des questions suivantes. Il s'agit a priori de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5 *(X 2021)*

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall x \in [0;1]\ \forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tq $|a_n - x| \leq \epsilon$

Exercice 6 *(X 2021)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

- $u_1 \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} = \sin(u_n) + \dfrac{1}{n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a à partir d'un certain rang $u_n^3 \geq \dfrac{6-\delta}{n}$.

Exercice 7 *(Ens 2023)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
$\forall x \in E\ \ \|f(x)\| \leq \|x\|$
Soit $x \in E$.
Etudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$.

2 Normes équivalentes

Exercice 8

Soit $N_1 \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k| \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq \deg(P))$ et $N_2 \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{k\in[\![0;n]\!]} |a_k| \end{cases}$

1. Montrer que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   N_1 est également une norme sur $\mathbb{R}[X]$, on ne demande pas de le prouver.

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $N_{1,p}$ la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_p[X]$ et $N_{2,p}$ celle de N_2. Il s'agit de normes sur $\mathbb{R}_p[X]$ (on ne demande pas de le prouver).
   A p fixé, les normes $N_{1,p}$ et $N_{2,p}$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 9 *(Centrale 2015)*

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des f de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \displaystyle\int_0^1 |f|\varphi$.

1. Soit $\varphi \in E_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+. On suppose $\varphi_1 > 0$ et $\varphi_2 > 0$. Montrer que $\| \ \|_{\varphi_1}$ et $\| \ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\| \ \|_{x\mapsto x}$ et $\| \ \|_{x\mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

3 Continuité en un point

Exercice 10

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt[4]{x^4+y^4}^a}{\sqrt{x^2+y^2}^b} \end{cases}$.

Donner une CNS portant sur (a,b) pour que f soit prolongeable par continuité $(0,0)$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $(0,0)$ telle que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x,y) = f\left(y, \dfrac{5y-x}{6}\right)$

Montrer que f est constante.