TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 2
Limites dans un espace vectoriel normé
Correction

941

1 Suites d'un espace vectoriel de dimension finie

Exercice 1 *(Mines 2013)*

Montrer que $z \mapsto \dfrac{2z+1}{z+2}$ est une bijection du disque unité fermé D de $\mathbb{C}$ sur lui même.
Étudier la suite (z_n) définie par $z_0 \in D$ et $z_{n+1} = f(z_n)$.

Correction
f est bien définie sur D : $\forall z \in D\ z+2 \neq 0$
Soit $z \in D$.
Il existe $r \in [0;1]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = r\ \mathrm{e}^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
|z+2|^2 &= (r\ \mathrm{e}^{i\theta}+2)\,(r\ \mathrm{e}^{-i\theta}+2) \\
&= r^2 + 2\,r\left(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right) + 4 \\
&= r^2 + 4\,r\ \cos\theta + 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|2z+1|^2 &= \left(2\,r\ \mathrm{e}^{i\theta}+1\right)\left(2\,r\ \mathrm{e}^{-i\theta}+1\right) \\
&= 4\,r^2 + 2\,r\left(\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}\right) + 1 \\
&= 4\,r^2 + 4\,r\ \cos\theta + 1
\end{aligned}$$

$|z+2|^2 - |2z+1|^2 = 3 - 3r^2 = 3(1-r^2) \geq 0$
f va bien de D dans D.

Soit $a \in D$.

$$\begin{aligned}
f(z) = a &\iff 2z+1 = a(z+2) \\
&\iff 2z+1 = az+2a \\
&\iff (2-a)z = 2a-1 \\
&\iff z = \frac{2a-1}{2-a} = -\frac{1-2a}{2-a} = -f(-a)
\end{aligned}$$

$|-f(-a)| = |f(-a)| \leq 1$ car $-a \in D$.
f est bien une bijection de D sur D.

Pour l'étude de la suite, plusieurs méthodes sont possibles.
On commence par déterminer les points fixes :

$$\begin{aligned} f(z) = z &\iff 2z + 1 = z^2 + 2z \\ &\iff z^2 = 1 \\ &\iff z = \pm 1 \end{aligned}$$

On s'intéresse à l'écart de f avec les points fixes :
$f(z) - 1 = \dfrac{z-1}{z+2}$
$f(z) + 1 = \dfrac{3(z+1)}{z+2}$

- **Première méthode**
  On essaie d'intuiter le comportement de la suite : est-ce qu'on converge vers 1, -1 ou est-ce qu'on diverge ?
  $|f(z) - 1| = \dfrac{|z-1|}{|z+2|}$
  $|f(z) + 1| = \dfrac{3}{|z+2|}\,|z+1|$
  $|z+2|$ est la distance entre z et -2. Un dessin permet de voir qu'elle est comprise entre 1 (atteint uniquement pour $z = -1$) et 3 (atteint uniquement pour $z = 1$).
  Donc en général, on se rapproche de 1 et on s'éloigne de -1.
  D'où l'idée de montrer que la limite est 1.
  — **Premier cas :** $z_0 = -1$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n = -1$
  (z_n) converge vers -1.
  — **Deuxième cas :** $z_0 \in D \setminus \{-1\}$
  Il résulte de l'étude précédente :
  la suite (z_n) est bien définie et :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n \in D \setminus \{-1\}$
  Un dessin permet de voir :
  $\forall z \in D \setminus \{-1\}\ |z+2| > 1$
  On en déduit :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ |z_{n+1} - 1| < |z_n - 1|$ (sauf si $z_0 = 1$ auquel cas il y a égalité à 0) mais ce n'est pas suffisant.
  On fait un dessin.
  On trace le cercle de centre 1 et passant par z_0.
  Son rayon est $|z_0 - 1| < 2$ et il coupe l'axe des x à gauche en $1 - |z_0 - 1| > -1$.
  Sur D, $|z+2| \geq 1$ donc on se rapproche de 1 et le disque de centre 1 et de rayon $|z_0 - 1|$ est stable par f.
  Sur le dessin, on voit que si z appartient au disque de centre 1 et de rayon $|z_0 - 1|$:
  $|z+2| \geq |1 - |z_0 - 1| + 2| = |3 - |z_0 - 1|| = 3 - |z_0 - 1| = k > 1$
  On a alors :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ |z_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{k}\,|z_n - 1|$

(z_n) converge vers 1.

- **Deuxième méthode**
  Les cas $z_0 = 1$ et $z_0 = -1$ sont clairs.
  On suppose $z_0 \neq \pm 1$.
  Il résulte du début de l'exercice (f est injective sur D) :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n \neq \pm 1$
  On remarque sur les calculs précédents que :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{z_{n+1}-1}{z_{n+1}+1} = \dfrac{1}{3}\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$
  On en déduit :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1} = \dfrac{1}{3^n}\dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1}$
  Donc $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
  Mais $u_n + 1 = z_n(u_n - 1)$ avec $u_n \neq 1$ (sinon $2 = 0$) donc $z_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
- **Troisième méthode**
  Le cas $z_0 = 1$ est clair.
  On suppose $z_0 \neq 1$.
  $f(z) - 1 = \dfrac{z-1}{z+2}$
  Donc une récurrence triviale permet de prouver :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ z_n \neq 1$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ \frac{1}{z_{n+1}-1} &= \frac{1}{f(z_n)-1} = \frac{z_n+2}{z_n-1} \\ &= 1 + \frac{3}{z_n - 1} \end{aligned}$$

  La suite $(u_n) = \left(\dfrac{1}{z_n - 1}\right)$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie la relation de récurrence :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 1 + 3u_n$
  $l = 1 + 3l \iff l = -\dfrac{1}{2}$
  On en déduit :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -\dfrac{1}{2} + 3^n\left(u_0 + \dfrac{1}{2}\right)$
  $u_0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{z_0 - 1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{z_0 + 1}{z_0 - 1}$
  On en déduit :
  si $z_0 \neq -1$ alors $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $z_n - 1 = \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et (z_n) converge vers 1.
  si $z_0 = -1$ alors $u_n = -\dfrac{1}{2}$ pour tout n et $z_n = 1 + \dfrac{1}{u_n} = -1$.

Exercice 2 *(Centrale 2013)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n \ln(x) = 1$.

1. Montrer qu'elle admet une unique solution que l'on notera α_n.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \alpha_n > 1$
3. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

4. Calcul de l.
5. Montrer que $\alpha_n - l \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \ln(x) \end{cases}$.
   f_n est $\mathcal{C}^\infty$ et :
   $\forall x > 0\ f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = nx^{n-1}\left(\ln(x) + \dfrac{1}{n}\right)$.
   f_n est donc strictement décroissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{-1/n}\right]$ de 0 à $-\dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}$.
   En particulier :
   $\forall x \in \left]0; \mathrm{e}^{-1/n}\right]\ f_n(x) < 0$
   f_n est strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1/n}; +\infty\right[$ de $-\dfrac{1}{n\,\mathrm{e}}$ à $+\infty$.
   f_n étant de plus continue, f_n réalise une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1/n}; +\infty\right[$ sur $\left[\dfrac{-1}{n\,\mathrm{e}}; +\infty\right[$.
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists! \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tq $f_n(\alpha_n) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $f_n(1) = 0$ et :
   $\forall x \in]0;1[\ f_n(x) < 0$
   Mais $f_n(\alpha_n) = 1 > 0$ donc $\alpha_n > 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n \ln(\alpha_{n+1}) = \dfrac{\alpha_{n+1}^n}{\alpha_{n+1}^{n+1}} = \dfrac{1}{\alpha_{n+1}} < 1$
   On déduit alors du tableau de variations de f_n :
   $\alpha_{n+1} < \alpha_n$

   La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $l \in [1; +\infty[$.

4. Supposons $l > 1$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ l \leq \alpha_n$ car la suite est décroissante.
   On en déduit :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ l^n \leq \alpha_n^n = \dfrac{1}{\ln(\alpha_n)}$
   $l > 1$ donc $l^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l) > 0$.
   En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $+\infty \leq \dfrac{1}{\ln(l)}$: c'est absurde.
   Donc $l = 1$.

5. Si l'énoncé ne fournit pas l'équivalent, on peut procéder ainsi :
   On écrit $\alpha_n = 1 + \epsilon_n$ avec $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   $(1+\epsilon_n)^n \ln(1+\epsilon_n) = 1$ donc $\epsilon_n \sim (1+\epsilon_n)^{-n} = \exp(-n\ln(1+\epsilon_n))$
   $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(\epsilon_n) \sim -n\ln(1+\epsilon_n) \sim -n\epsilon_n$

On a donc $n \sim \dfrac{-\ln(\epsilon_n)}{\epsilon_n}$ et $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
On en déduit : $\ln(n) \sim -\ln(\epsilon_n) + \ln(-\ln(\epsilon_n))$.
Mais $-\ln(\epsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $-\ln(\epsilon_n) + \ln(-\ln(\epsilon_n)) \sim -\ln(\epsilon_n)$.
Donc $\ln(\epsilon_n) \sim -\ln(n)$ et finalement :

$$\epsilon_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

L'énoncé fournissant l'équivalent, on peut procéder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
f_n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right) &= \left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)^n \ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(n\left(\frac{\ln(n)}{n}+O\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right)\right)\right)\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\ln(n)+o(1)\right)\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= n\,\mathrm{e}^{o(1)}\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&\sim \ln(n)
\end{aligned}$$

Donc $f_n\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\alpha_n \leq 1+\dfrac{\ln(n)}{n}$ à partir d'un certain rang.
Soit $\epsilon \in]0;1[$.

$$\begin{aligned}
f_n\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right) &= \left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)^n \ln\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\ln\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(n\left((1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}+O\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right)\right)\right)\ln\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left((1-\epsilon)\ln(n)+o(1)\right)\ln\left(1+(1-\epsilon)\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&= n^{1-\epsilon}\,\mathrm{e}^{o(1)}\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)\\
&\sim n^{-\epsilon}\ln(n)
\end{aligned}$$

Donc $f_n\left(1+(1-\epsilon)\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\alpha_n \geq 1+\left(1-\epsilon\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ à partir d'un certain rang.
Donc à partir d'un certain rang $1-\epsilon \leq \dfrac{\alpha_n-1}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq 1$ et on conclut facilement.

Exercice 3 *(X 2021)*

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n + X^2 + X - 1$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$, notée r_n.

2. Montrer que la suite (r_n) est bornée.
3. Montrer que la suite (r_n) est convergente et déterminer sa limite l.
4. Equivalent de $r_n - l$.

Correction

1. Soit $n \geq 2$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ P_n'(x) = nx^{n-1} + 2x + 1 > 0$
   Donc P_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[P_n(0); \lim_{+\infty} P_n(x)[= [-1; +\infty[$.
   Par conséquent :
   $\exists! r_n \in \mathbb{R}_+$ tq $P_n(r_n) = 0$.
2. $\forall n \geq 2 \ P_n(1) = 1 > 0$
   Donc :
   $\forall n \geq 2 \ 0 < r_n < 1$
   On peut aller plus loin.
   On considère le polynôme $X^2 + X - 1$.
   Son discriminant est $\Delta = 5$.
   Ses racines sont $\rho_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\rho_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in]0; 1[$.
   $\forall n \geq 2 \ P_n\left(\rho_2^n\right) = \rho_2^n > 0$
   Donc :
   $\forall n \geq 2 \ 0 \leq r_n \leq \rho_2$
3. $P_{n+1}(r_n) = r_n^{n+1} + r_n^2 + r_n - 1 = r_n^{n+1} - r_n^n = r_n^n(r_n - 1) < 0$
   Donc $r_n < r_{n+1}$.
   La suite (r_n) est croissante et majorée par ρ_2 donc elle converge.
   $\forall n \geq 2 \ 0 \leq r_n^n \leq \rho_2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
   Donc $r_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
   Mais :
   $\forall n \geq 2 \ r_n^n + r_n^2 + r_n - 1 = 0$
   Donc $l = \rho_2$ et $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, noté l dans la suite.
4. On pose $r_n = l(1 - \epsilon_n)$ avec $\epsilon_n > 0$ et $\epsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= r_n^n + r_n^2 + r_n - 1 \\ &= l^n(1-\epsilon_n)^n + l^2 - 2l^2\epsilon_n + l^2\epsilon_n^2 + l - l\epsilon_n - 1 \\ &= l_2^n(1-\epsilon_n)^n - l(2l+1)\epsilon_n + l^2\epsilon_n^2 \end{aligned}$$

   On en déduit $l(2l+1)\epsilon_n - l^2\epsilon_n^2 = l^n(1-\epsilon_n)^n$ puis $l(2l+1)\epsilon_n \sim l^n(1-\epsilon_n)^n$
   $\forall n \geq 2 \ 0 \leq (1 - \epsilon_n)^n \leq 1$
   Donc : $\epsilon_n = O(l^n)$.
   $\ln\left((1-\epsilon_n)^n\right) = n \ln\left(1 - \epsilon_n\right) \sim -n\epsilon_n = O\left(nl^n\right)$ avec $l < 1$ donc :
   $\ln\left((1-\epsilon_n)^n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puis $(1-\epsilon_n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
   Finalement $l - r \sim \dfrac{l^n}{l(2l+1)}$.

   Remarque

Il y a une autre façon de montrer que $(1-\epsilon_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

$$\begin{aligned} P_n\left(l\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) &= l^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n + l^2 - 2\frac{l^2}{n^2} + \frac{l^2}{n^4} + l - \frac{l}{n^2} - 1 \\ &= l^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n - \frac{l(2l+1)}{n^2} + \frac{l^2}{n^4} \end{aligned}$$

$\forall n \geq 2$ $0 \leq l^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq l^n$ avec $l<1$ donc $l^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit $P_n\left(l\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{l(2l+1)}{n^2} < 0$ donc $P_n\left(l\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right) < 0$ à partir d'un certain rang.

D'où $l\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leq l(1-\epsilon_n)$ à partir d'un certain rang.

On en déduit $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leq (1-\epsilon_n)^n \leq 1$ à partir d'un certain rang.

Mais $\ln\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

On conclut facilement.

Exercice 4 *(CCP 2022)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui vérifie la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$m_n = \min(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$
$M_n = \max(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$

1. On suppose dans cette question que $p = 2$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose que les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{i=0}^{p-1}(i+1)u_{n+i}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. Montrer :
   $m_n \leq m_{n+1} \iff u_{n+p} \geq m_n$
   En déduire que la suite (m_n) est croissante.
5. Je n'ai pas l'énoncé des questions suivantes. Il s'agit a priori de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

1. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire à 2 pas.
   L'équation caractéristique est $2r^2 - r - 1 = 0$.
   $\Delta = 1 + 8 = 3^2 > 0$, $r_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = 1$
   $\exists (C_1 C_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = C_1 + C_2\frac{(-1)^n}{2^n}$
   On en déduit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} C_1$

2. On a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ m_n \leq u_n \leq M_n$
Les suites (m_n) et (M_n) sont adjacentes donc elles ont la même limite.
La suite (u_n) converge vers cette limite.

3.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} &= \sum_{i=0}^{p-1}(i+1)u_{n+1+i} = \sum_{j=1}^{p} j u_{n+j} \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} j u_{n+j} + p u_{n+p} = \sum_{j=0}^{p-1} j u_{n+j} + \sum_{j=0}^{p-1} u_{n+j} \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}(j+1)u_{n+j} = v_n\end{aligned}$$

4. On suppose $m_n \leq m_{n+1}$.
$m_{n+1} = \min(u_{n+1}, \ldots, u_{n+p})$ donc $u_{n+p} \geq m_{n+1}$
D'où $u_{n+p} \geq m_n$.

On suppose $u_{n+p} \geq m_n$.
$m_n = \min(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$ donc $u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$ sont également supérieurs ou égaux à m_n.
Donc $m_{n+1} = \min(u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}) \geq m_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$m_n = \min(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$ donc $u_n, \ldots, u_{n+p-1}$ sont supérieurs ou égaux à m_n.
Donc :
$u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}) \geq \frac{1}{p}(m_n + \cdots + m_n) = m_n$
D'où $m_n \leq m_{n+1}$.
La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

On montre de même que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus :
$\forall n \in \mathbb{N}\ m_n \leq M_n$
La suite (m_n) est croissante et majorée (par M_0) donc elle converge. On note l sa limite.
(m_n) est croissante donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ m_n \leq l$
La suite (M_n) est décroissante et minorée (par m_0) donc elle converge. On note L sa limite.
(M_n) est décroissante donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ M_n \geq L$
De plus :
$\forall n \in \mathbb{N}\ m_n \leq M_n$
Donc : $l \leq L$
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ l - \epsilon \leq m_n \leq l \leq L \leq M_n \leq L + \epsilon$
On a donc :
$\forall n \geq n_0\ l - \epsilon \leq u_n \leq L + \epsilon$

Soit $n \geq n_0 + p$.
$M_n = \max(u_n, \ldots, u_{n+p-1})$ donc il existe $i \in [\![0; p-1]\!]$ tq $u_{n+i} = M_n \geq L$.
$\forall j \in [\![1; p]\!]$ $u_{n+i+j} = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{n+i+j-k}$
Pour $k \in [\![1; p]\!] \setminus \{j\}$: $n + i + j - k \geq n + 0 + 1 - p \geq n_0 + 1$ donc $u_{n+i+j-k} \geq l - \epsilon$
Pour $k = j$: $u_{n+i+j-k} = u_{n+i} \geq L$
Donc :
$\forall j \in [\![1; p]\!]$ $u_{n+i+j} \geq \dfrac{1}{p}\left((p-1)(l-\epsilon) + L\right)$
Donc : $l \geq m_{n+i+1} = \min(u_{n+i+1}, \ldots, u_{n+i+p}) \geq \dfrac{1}{p}\left((p-1)(l-\epsilon) + L\right)$
Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a :
$l \geq \dfrac{1}{p}\left((p-1)l + L\right) = l + \dfrac{L-l}{p}$
On en déduit $L - l \leq 0$ ie $L \leq l$.
On aboutit donc à $L = l$ ce qui permet d'affirmer que les suites (m_n) et (M_n) sont adjacentes.
D'après la première question, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque

L'équation caractéristique de la relation de récurrence est $r^p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} r^k$.

Soit $P = X^p - \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} X^k$
$P(1) = 0$
$Q(X) = (X-1)P(X) = X^{p+1} - X^p - \dfrac{1}{p}(X^p - 1) = X^{p+1} - \dfrac{p+1}{p} X^p + \dfrac{1}{p}$
$Q'(X) = (p+1)X^p - (p+1)X^{p-1} = (p+1)X^{p-1}(X-1)$
$Q''(X) = p(p+1)X^{p-1} - (p+1)(p-1)X^{p-2}$
$Q(1) = Q'(1) = 0$ et $Q''(1) = p + 1 \neq 0$ donc 1 est racine double de Q.
On en déduit que 1 est racine simple de P.
Soit r une racine de P différente de 1.
r est non nulle car $P(0) = -\dfrac{1}{p} \neq 0$
Donc r n'est pas racine de Q' : r est racine simple de Q.
On en déduit que r est racine simple de P.
Par conséquent P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ses racines sont $r_1 = 1, r_2, \ldots, r_p$ et :
$\exists (C_1, \ldots, C_p) \in \mathbb{C}^p$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} C_k r^k$
Soit r une racine de P différente de 1.
Supposons $|r| > 1$.

$$\begin{aligned} |r^p| &= \left|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} r^k\right| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} |r|^k \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} |r|^{p-1} \\ &\leq |r|^{p-1} < |r|^p \end{aligned}$$

C'est absurde

Supposons $|r| = 1$.

$$1 = |r^p| \quad = \quad \left|\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} r^k\right| \leq \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} |r|^k = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} 1 = 1$$

Donc $\left|\sum_{k=0}^{p-1} r^k\right| = \sum_{k=0}^{p-1} |r|^k$
et les complexes non nuls r^k, $0 \leq k \leq p-1$ ont tous le même argument.
En particulier, r est un réel positif.
Comme $|r| = 1$, $r = 1$ ce qui est absurde.
Donc :
$\forall k \in [\![2; p]\!] \ \ |r_k| < 1$
D'où $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} C_1$

Exercice 5 *(X 2021)*

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall x \in [0; 1] \ \forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ tq $|a_n - x| \leq \epsilon$
Correction
La suite $(0, 1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 0, 0.01, \dots)$ convient.

Exercice 6 *(X 2021)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

- $u_1 \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} = \sin(u_n) + \dfrac{1}{n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a à partir d'un certain rang $u_n^3 \geq \dfrac{6-\delta}{n}$.

Correction

1. Cette question m'a demandé un peu de réflexion. J'ai intuité ainsi la solution :
   Si la suite converge vers l alors $l = \sin(l)$ et $l = 0$.
   L'énoncé disant que la suite décroît à partir d'un certain rang, u_n est donc positif à partir d'un certain rang. Le sinus étant croissant sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, si $u_{n+1} \leq u_n$ alors $\sin(u_{n+1}) \leq \sin(u_n)$.
   Mais $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
   Il s'agit donc de faire un raisonnement par récurrence.
   Encore faut-il initialiser la récurrence et montrer que la suite prend ses valeurs à partir d'un certain rang dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et qu'il existe un entier n assez grand tel que $u_{n+1} \leq u_n$.

   Comme l'énoncé ne dit rien de u_1, la positivité de u_n n'est pas triviale.
   Il faut ici remarquer que :

$u_2 = \sin(u_1) + 1 \in [0;2]$
Pour tout $n \geq 3$, soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
$u_2 \in [0;2] \subset [0;\pi]$ donc $\sin(u_2) \in [0;1]$ et $u_3 \in \left[\frac{1}{2};1+\frac{1}{2}\right] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
Donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n \geq 3$).
$u_n \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(u_n) \in [0;1]$
On en déduit $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right] \subset \left[0;1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\right] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
On a donc prouvé :
$\forall n \geq 3\ u_n \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Supposons :
$\forall n \geq 3\ u_{n+1} > u_n$
La suite (u_n) est croissante, à partir de $n=3$, et majorée donc elle converge. Soit l sa limite.
$u_{n+1} = \sin(u_n) + \frac{1}{n}$ donc à la limite, $l = \sin(l)$.
Une étude de la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ montre que cette équation a une seule solution et 0 est clairement solution donc $l = 0$.
Mais $(u_n)_{n\geq 3}$ est croissante donc :
$\forall n \geq 3\ u_n \leq l$
Mais $u_n \geq 0$ pour $n = 3$ donc :
$\forall n \geq 3\ u_n = 0$: absurde en reportant dans la définition de la suite.
On a donc prouvé :
$\exists n_0 \geq 3$ tq $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$
Pour tout $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$
$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
$n \geq n_0 \geq 3$ donc $n \geq 3$ et u_n et $u_{n+1} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
On en déduit $\sin(u_{n+1}) \leq \sin(u_n)$.
De plus $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.
On a donc montré que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.

2. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et minorée donc converge.
   On en déduit que la suite $(u_n)_{n_i n\mathbb{N}^*}$ converge.
   Comme justifié dans la question précédente, sa limite est nulle.
3. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante donc si il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $u_{n_1} = 0$ alors pour tout $n \geq n_1$, $u_n = 0$.
   C'est absurde à cause de la défintion de la suite donc :
   $\forall n \geq n_0\ u_n \neq 0$
   Comme la suite est positive à partir du rang $3 \leq n_0$, on a :
   $\forall n \geq n_0\ u_n > 0$
   Pour $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc $\frac{1}{n} \leq u_n - \sin u_n$.
   On en déduit :
   $\forall n \geq n_0\ \frac{1}{nu_n^3} \leq \frac{u_n - \sin u_n}{u_n^3}$

Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n - \sin u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to]{} \dfrac{1}{6}$.
Le cas $\delta \geq 6$ est trivial à cause de la positivité de u_n donc on suppose $\delta \in]0;6[$.
$0 < 6-\delta < 6$ donc $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6-\delta}$ et :
$\exists n_1 \geq n_0$ tq $\forall n \geq n_1$ $\dfrac{u_n - \sin u_n}{u_n^3} \leq \dfrac{1}{6-\delta}$
On a alors :
$\forall n \geq n_1$ $\dfrac{1}{nu_n^3} \leq \dfrac{1}{6-\delta}$
On conclut facilement.

Exercice 7 *(Ens 2023)*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
$\forall x \in E$ $\|f(x)\| \leq \|x\|$
Soit $x \in E$.
Etudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)$.

Correction
$$(id_E - f)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(f^k(x) - f^{k+1}(x)\right) = \frac{1}{n+1}\left(x - f^{n+1}(x)\right)$$
Mais :
$\forall z \in E$ $\|f(z)\| \leq \|z\|$
Donc par récurrence :
$\forall z \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f^n(z)\| \leq \|z\|$
Donc :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\|(id_E - f)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right)\right\| \leq \frac{2}{n+1}\|x\|$$
Donc :
$$(id_E - f)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Si $id_E - f$ est inversible et en admettant la continuité des applications linéaires en dimension finie :
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x) = (id_E - f)^{-1}\left((id_E - f)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Dans le cas général, deux polynômes en f commutant :
$$\forall x \in E \quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x - f(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
En d'autres termes :
$$\forall x \in \operatorname{Im}(id_E - f) = \operatorname{Im}(f - id_E) \quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - id)$.
$f(x) = x$ et par récurrence :
$\forall k \in \mathbb{N}$ $f^k(x) = x$
On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x) = x \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - id) \cap \operatorname{Im}(f - id)$.
D'après ce qui précède et par unicité de la limite : $x = 0$

Donc la somme $\mathrm{Ker}\,(f-id)+\mathrm{Im}\,(f-id)$ est directe. Compte tenu de la formule du rang, $\mathrm{Ker}\,(f-id)$ et $\mathrm{Im}\,(f-id)$ sont supplémentaires.
Soit alors $x\in E$.
$\exists!(x_K,x_I)\in \mathrm{Ker}\,(f-id)\times \mathrm{Im}\,(f-id)$ tq $x=x_K+x_I$
$\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f^k(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x_K)+\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k(x_I)\xrightarrow[n\to+\infty]{} x_K$

2 Normes équivalentes

Exercice 8

Soit $N_1\begin{cases}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}\\ P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\mapsto\sum_{k=0}^{n}|a_k|\end{cases}$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq \deg(P))$ et $N_2\begin{cases}\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}\\ P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\mapsto\max_{k\in[\![0;n]\!]}|a_k|\end{cases}$

1. Montrer que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   N_1 est également une norme sur $\mathbb{R}[X]$, on ne demande pas de le prouver.
2. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note $N_{1,p}$ la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_p[X]$ et $N_{2,p}$ celle de N_2. Il s'agit de normes sur $\mathbb{R}_p[X]$ (on ne demande pas de le prouver).
   A p fixé, les normes $N_{1,p}$ et $N_{2,p}$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Correction

1. • On a bien :
   $\forall P\in\mathbb{R}[X]\ N_2(P)\in\mathbb{R}_+$ (maximum d'un nombre fini de réels positifs)
   • Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}N_2(\lambda P)&=N_2\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda a_kX^k\right)=\max_{0\leq k\leq n}(|\lambda a_k|)=\max_{0\leq k\leq n}(|\lambda|\,|a_k|)\\&=|\lambda|\max_{k\in[\![0;n]\!]}|a_k|\ \text{ car }\ |\lambda|\in\mathbb{R}_+\\&=|\lambda|\,N_2(P)\end{aligned}$$

   • Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ tel que $N_2(P)=0$.
   $\forall k\in[\![0;n]\!]\ 0\leq|a_k|\leq N_2(P)=0$
   Donc tous les coefficients de P sont nuls et P est le polynôme nul.
   • Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}b_kX^k\in\mathbb{R}[X]$.
   Soit $p=\max(n,m)$.
   Quitte à ajouter des coefficients nuls, on peut écrire $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}b_kX^k$.
   On a alors : $P+Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(a_k+b_k)X^k$.
   D'où $N_2(P+Q)=\displaystyle\max_{k\in[\![0;p]\!]}|a_k+b_k|$.
   Mais :

$\forall k \in [\![0;p]\!]\ |a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq N_2(P) + N_2(Q)$ indépendant de k
Donc $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$

2. $\mathbb{R}_p[X]$ étant de dimension finie, $N_{1,p}$ et $N_{2,p}$ sont équivalentes.
3. On a :
$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ N_2(P) \leq N_1(P)$
Par contre, il n'existe pas de constante C telle que $N_1 \leq CN_2$.
En effet si c'était le cas, on aurait avec le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} X^k$:
$\forall p \in \mathbb{N}\ p+1 \leq C$
ce qui est absurde.
N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 9 *(Centrale 2015)*

Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et E_+ l'ensemble des f de E positives et ne s'annulant qu'un nombre fini de fois. Si $f \in E$ et $\varphi \in E_+$, on pose $\|f\|_\varphi = \displaystyle\int_0^1 |f|\varphi$.

1. Soit $\varphi \in E_+$. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_\varphi$ définit une norme sur E.
2. Soient φ_1 et φ_2 dans E_+. On suppose $\varphi_1 > 0$ et $\varphi_2 > 0$. Montrer que $\|\ \|_{\varphi_1}$ et $\|\ \|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
3. Les normes $\|\ \|_{x\mapsto x}$ et $\|\ \|_{x\mapsto x^2}$ sont-elles équivalentes ?

Correction

1.
   - On a bien :
   $\forall f \in E\ \ \|f\|_\varphi \in \mathbb{R}_+$ (intégrale sur un segment d'une fonction continue et positive)
   -
   $$\begin{aligned}\forall f \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \|\lambda f\|_\infty &= \int_0^1 |\lambda f(x)|\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\lambda|\,|f(x)|\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\varphi(x)\,\mathrm{d}x = |\lambda|\,\|f\|_\varphi\end{aligned}$$
   - Soit $f \in E$ telle que $\|f\|_\varphi = 0$.
   On a $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ avec $|f|\,\varphi$ continue et positive sur $[0;1]$ donc :
   $\forall x \in [0;1]\ |f(x)|\varphi(x) = 0$
   Donc f est nulle sauf en un nombre fini de points.
   Par densité (et continuité de f), f est nulle.
   - Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall x \in [0;1]\ \ |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$
   On multiplie par $\varphi(x) \geq 0$:
   $\forall x \in [0;1]\ \ |(f(x)+g(x))|\,\varphi(x) \leq |f(x)|\,\varphi(x) + |g(x)|\,\varphi(x)$
   et il n'y a plus qu'à intégrer entre 0 et 1 pour obtenir :
   $\|f+g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$
2. La fonction $\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$ est bien définie et elle est continue sur le **segment** $[0;1]$ donc :
$\exists (x_1,x_2) \in [0;1]^2$ tq $\forall x \in [0;1]\ \dfrac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)} \leq \dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \leq \dfrac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_2)}$

En notant $c_1 = \dfrac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)} \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 = \dfrac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_2)} \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$\forall x \in [0;1]\ c_1\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq c_2\varphi_1(x)$
En multipliant par $|f(x)| \in \mathbb{R}_+$ et en intégrant, on obtient :
$\forall f \in E\ c_1 \|f\|_{\varphi_1} \leq \|f\|_{\varphi_2} \leq \|f\|_{\varphi_1}$

Remarque
φ_1 est continue sur le **segment** $[0;1]$ donc :
$\exists (x_1, y_1) \in [0;1]^2$ tq $\forall x \in [0;1]\ 0 < m_1 = \varphi_1(x_1) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_1(y_1) = M_1$
On en déduit comme ci-dessus :
$\forall f \in E\ m_1 \|f\|_1 \leq \|f\|_{\varphi_1} \leq M_1 \|f\|_1$
De même :
$\exists (m_2, M_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall f \in E\ m_2 \|f\|_1 \leq \|f\|_{\varphi_2} \leq M_2 \|f\|_1$
On a alors :
$\forall f \in E\ \dfrac{m_2}{M_1} \|f\|_{\varphi_1} \leq \|f\|_{\varphi_2} \leq \dfrac{M_2}{m_1} \|f\|_{\varphi_1}$
avec $\dfrac{m_2}{M_1}$ et $\dfrac{M_2}{m_1} > 0$

3. $\forall x \in [0;1]\ x^2 \leq x$
On en déduit : $\|\ \|_{x\mapsto x} \geq \|\ \|_{x\mapsto x^2}$
Mais il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $\|\ \|_{x\mapsto x} \leq C\|\ \|_{x\mapsto x^2}$
En effet, si on note $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - nx \text{ si } x \leq \dfrac{1}{n} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$ alors :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{x\mapsto x} &= \int_0^{1/n} (1-nx)x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{nx^3}{3}\right]_0^{1/n} \\ &= \frac{1}{6n^2} \\ \|f_n\|_{x\mapsto x^2} &= \int_0^{1/n} (1-nx)x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{nx^4}{4}\right]_0^{1/n} \\ &= \frac{1}{12n^3} \end{aligned}$$

et on aurait :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{1}{6n^2} \leq \dfrac{C}{12n^3}$
ce qui conduit à :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ 2n \leq C$
Les normes $\|\ \|_{x\mapsto x}$ et $\|\ \|_{x\mapsto x^2}$ ne sont pas équivalentes.

3 Continuité en un point

Exercice 10

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt[4]{x^4+y^4}^a}{\sqrt{x^2+y^2}^b} \end{cases}$.

Donner une CNS portant sur (a,b) pour que f soit prolongeable par continuité $(0,0)$.

Correction
On passe en polaires :
$\forall(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{a-b}\left(\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)\right)^{a/4}$

- **Premier cas :** $a < b$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x,0) = x^{a-b} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$
  Donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- **Deuxième cas :** $a = b$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x,0) = 1 \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 1$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x,x) = 2^{a/4-b/2}x^{4a/4-2b/2} = 2^{-a/4} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 2^{-a/4}$
  Si $a \neq 0$ alors f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
  Par contre si $a = b = 0$, f est prolongeable par continuité en 0 car c'est la fonction constante égale à 1.
- **Troisième cas :** $a > b$

$$\begin{aligned}\forall\theta \in \mathbb{R}\ \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) &= \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right)^2 - 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) \in \left[\frac{1}{2};1\right]\end{aligned}$$

  Si $a \geq 0$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ |f(x,y)| \leq \|(x,y)\|_2^{a-b} \underset{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}{\longrightarrow} 0$
  Si $a \geq 0$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ |f(x,y)| \leq 2^{-a/4}\|(x,y)\|_2^{a-b} \underset{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}{\longrightarrow} 0$
  Donc $f(x,y) \underset{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}}{\longrightarrow} 0$ et f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Finalement la CNS cherchée est $a > b$ ou $a = b = 0$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $(0,0)$ telle que :
$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) = f\left(y, \dfrac{5y-x}{6}\right)$
Montrer que f est constante.

Démonstration
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$, $u_1 = y$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = \dfrac{5u_{n+1} - u_n}{6}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : f(u_n, u_{n+1}) = f(x,y)$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
$f(u_{n+1}, u_{n+2}) = f\left(u_{n+1}, \dfrac{5u_{n+1} - u_n}{6}\right) = f(u_n, u_{n+1}) = f(x,y)$

Explicitons u_n.

Equation caractéristique : $r^2 = \dfrac{5r-1}{6}$
Il y a deux racines réelles simples : $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.
On en déduit :
$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{A}{2^n} + \dfrac{B}{3^n}$
Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
f étant continue en $(0,0)$, $f(u_n, u_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0,0)$ et par uncité de la limite $f(x,y) = f(0,0)$.
f est donc constante.
La réciproque est triviale.