ANALYSE 2
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 2 :
Limites dans un espace vectoriel normé

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Suites d'un espace vectoriel normé

1.1 Définition d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
On appelle suite à valeurs dans E toute application de $\mathbb{N}$ dans E :
$\begin{cases} \mathbb{N} \to E \\ n \mapsto u_n \end{cases}$
Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On définit de même les suites définies à partir d'un rang n_0 : $(u_n)_{n\geq n_0}$.
L'ensemble des suites à valeurs dans E, $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ (noté aussi $E^{\mathbb{N}}$), muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$ ev.

1.2 Définition d'une suite convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :
$\exists l \in E$ tq $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq n_0 \Longrightarrow \|u_n - l\| \leq \epsilon$
Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

1.3 Limite d'une suite convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

On conserve les notations précédentes.
Si l existe alors l est unique.
En effet, soient l et l' 2 éléments de E vérifiant la propriété ci-dessus.
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists (n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tq $\begin{cases} \forall n \geq n_0 \ \|u_n - l\| \leq \epsilon \\ \forall n \geq n_1 \ \|u_n - l'\| \leq \epsilon \end{cases}$
Soit $n = \max(n_0, n_1)$.
On a $\|u_n - l\| \leq \epsilon$ et $\|u_n - l'\| \leq \epsilon$.
D'où $\|l - l'\| = \|l - u_n + u_n - l'\| \leq \|l - u_n\| + \|u_n - l'\| \leq 2\epsilon$.

On a donc :
$\forall \epsilon > 0 \; 0 \leq \|l - l'\| \leq 2\epsilon$
On en déduit $\|l - l'\| = 0$ ie $l = l'$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, l s'appelle la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
On a donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \; \|u_n - l\| \leq \epsilon}$$

qu'on peut aussi écrire :
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \; d(u_n, l) \leq \epsilon$
ou encore :
$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \; u_n \in \mathcal{B}_f(l, \epsilon)$

1.4 Propriétés

- Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
  Soit $\|.\|$ une norme sur E.
  $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff u_n - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E \iff \|u_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbb{R}}$
  En effet les trois définitions s'écrivent de la même façon.

- Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
  Soit $\|.\|$ une norme sur E.
  Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|l\|$.
  La réciproque est fausse sauf si $l = 0_E$.

  Démonstration
  $\forall n \in \mathbb{N} \; \left|\|u_n\| - \|l\|\right| \leq \|u_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  D'où le résultat (d'après les résultats sur les suites réelles vus en SUP).
  La suite $((-1)^n l)_{n\in\mathbb{N}}$ montre que la réciproque est fausse lorsque $l \neq 0_E$.

  Remarque
  L'inégalité :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; \left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x - y\|$
  se montre ainsi :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; \|x\| = \|y + x - y\| \leq \|y\| + \|x - y\|$
  Donc :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
  On en déduit :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$
  Donc :
  $\forall (x, y) \in E^2 \; \left|\|x\| - \|y\|\right| = \max\left(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\right) \leq \|x - y\|$

1.5 Suites convergentes et suites bornées

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Toute suite à valeurs dans E qui converge est bornée.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E qui converge.
La suite réelle $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (cf le paragraphe précédent) donc, d'après le cours de SUP, elle est bornée (ou majorée : cela revient au même pour une suite positive). Donc :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|u_n\| \leq M$
C'est le résultat voulu.

Remarque
La réciproque est évidemment fausse : cf $((-1)^n\, v)_{n\in\mathbb{N}}$ où v est un vecteur non nul de E.

1.6 Opérations algébriques

- **Proposition**
  Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de E.
  Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et
  $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

  Démonstration
  Soient $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
  $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \|(u_n + v_n) - (l + l')\| \leq \|u_n - l\| + \|v_n - l'\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (SUP).
  Donc la suite réelle $(\|(u_n + v_n) - (l + l')\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (SUP).
  C'est le résultat voulu.

- **Proposition**
  Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E qui converge vers $l \in E$.
  Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Alors $\lambda_n u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l$.
  En particulier si on prend pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n = \lambda$ on a :
  $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l$.

  Démonstration
  $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n u_n - \lambda l = \lambda_n(u_n - l) + (\lambda_n - \lambda)l$
  $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \|\lambda_n u_n - \lambda l\| \leq |\lambda_n|\, \|u_n - l\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|l\|$
  $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$ donc elle est bornée (cf SUP).
  Donc $|\lambda_n|\, \|u_n - l\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Donc la suite réelle $(\|\lambda_n u_n - \lambda l\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (SUP).
  C'est le résultat voulu.

- On déduit des deux propositions précédentes que l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites convergentes à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E est un $\mathbb{K}$ ev (c'est un sev de $E^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E).
  De plus l'application $\begin{cases} \mathcal{C} \to E \\ (u_n) \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{cases}$ est linéaire.

1.7 Suites extraites

- **Définition**
  Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans E.
  On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) si et seulement si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_{\varphi(n)}$.

  Exemples
  $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$, ...

- **Suites extraites d'une suite convergente**
  Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $l \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
  $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Longrightarrow$ toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

  Démonstration

$$\begin{aligned}
u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{la suite réelle } (\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\\
&\Longrightarrow \quad \text{pour tout } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow \left(\left\|u_{\varphi(n)} - l\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0 (SUP)}\\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pour tout } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l
\end{aligned}$$

  Remarques
  — L'implication de la proposition précédente est en fait une équivalence mais elle n'est pas mentionnée au programme et n'a pas d'utilité pratique.
  — Il a sûrement été vu en SUP :
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
  $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Longrightarrow$ toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
  $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \Longrightarrow$ toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$
  Les réciproques sont vraies mais sans intérêt pratique.

  — **Proposition**
  Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $l \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Longleftrightarrow \begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \end{cases}$$

  Démonstration

$$\begin{aligned}
u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad &\Leftrightarrow \quad \text{la suite réelle } (\|u_n - l\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\\
&\Leftrightarrow \quad \text{les deux suites réelles } (\|u_{2n} - l\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (\|u_{2n+1} - l\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers 0 (SUP)}\\
&\Leftrightarrow \quad \text{les deux suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers } l
\end{aligned}$$

  Remarque
  On a un résultat similaire pour les suites réelles et $l = \pm\infty$.

2 Normes équivalentes

2.1 Quelle norme choisir ?

Dans les espaces usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{K})$ ... il existe plusieurs normes. Le choix de la norme a-t-il de l'importance ?

- En dimension infinie oui.
  Par exemple dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, on peut définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n \end{cases}$.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  Donc dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle.
  Par contre :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} (|f_n(t)|) = \sup_{t\in[0;1]} (t^n) = 1$
  Donc dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle.
  Par contre si une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ alors elle converge vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$.
  En effet :
  $\forall g \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})\ \|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|g\|_\infty\ \mathrm{d}t = \|g\|_\infty$
- En dimension finie non.

2.2 Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, il existe deux constantes strictement positives a et b telles que $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$ ie :
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E\ aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$

2.3 Comparaison des normes usuelles

2.3.1 Cas de $\mathbb{K}^n$

- **Comparaison de $\|.\|_1$ et de $\|.\|_\infty$**
  $\forall x \in \mathbb{K}^n\ \ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty \leq n\|x\|_\infty$
  Il y a égalité pour $x = (1,\ldots,1)$.
  On ne peut donc pas faire mieux.
  En effet, supposons :
  $\forall x \in \mathbb{K}^n\ \ \|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty$
  En prenant $x = (1,\ldots,1)$, on obtient $n \leq C$.

  $\forall x \in \mathbb{K}^n\ \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ (on ajoute des nombres positifs)
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $x = (1,0,\ldots,0)$.

Dans $\mathbb{K}^n$, $\|.\|_1$ et de $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

- **Comparaison de $\|.\|_2$ et de $\|.\|_\infty$**
  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty^2 \leq n \|x\|_\infty^2$
  Donc :
  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $x = (1, \ldots, 1)$.

  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2$ (on ajoute des nombres positifs)
  Donc :
  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$.
  Dans $\mathbb{K}^n$, $\|.\|_2$ et de $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

- **Comparaison de $\|.\|_1$ et de $\|.\|_2$**
  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_1^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} |x_k| \, |x_l| \geq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$
  Donc :
  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_1 \geq \|x\|_2$
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $x = (1, 0, \ldots, 0)$.

  $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} 1 \times |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique)
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $x = (1, \ldots, 1)$.
  Dans $\mathbb{K}^n$, $\|.\|_1$ et de $\|.\|_2$ sont équivalentes.

2.3.2 Cas de $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{K})$

- **Comparaison de $\|.\|_1$ et de $\|.\|_\infty$**
  $\forall f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{K}) \ \ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, \mathrm{d}t = \|f\|_\infty$
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{K} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$.

  Par contre, il n'existe pas de constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{K})$, $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_1$.
  En effet, supposons que C existe.
  On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{K})$ définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in [0;1] \ f_n(t) = t^n$
  $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \|f_n\|_\infty \leq C \|f_n\|_1$
  $\forall n \in \mathbb{N} \ 1 \leq \dfrac{C}{n+1}$
  En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1 \leq 0$: c'est absurde.
- **Comparaison de $\|.\|_2$ et de $\|.\|_\infty$**
  $\forall f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{K}) \ \ \|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 \, \mathrm{d}t = \|f\|_\infty^2$

Donc :
$\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{K}) \ \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$
Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{K} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$.

Par contre, il n'existe pas de constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{K})$, $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$.
En effet, supposons que C existe.
On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{K})$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0;1]\ f_n(t) = t^n$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_\infty \leq C\|f_n\|_2$
$\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq C\sqrt{\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{\sqrt{2n+1}}$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1 \leq 0$: c'est absurde.

- **Comparaison de $\|.\|_1$ et de $\|.\|_2$**
  $\forall f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{K})\ \|f\|_1 = \int_0^1 1 \times |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
  Cette inégalité est optimale car il y a égalité pour $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{K} \\ t \mapsto 1 \end{cases}$.

  Par contre, il n'existe pas de constante C telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{K})$, $\|f\|_2 \leq C\|f\|_1$.
  En effet, supposons que C existe.
  On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{K})$ définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in [0;1]\ f_n(t) = t^n$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \|f_n\|_2 \leq C\|f_n\|_1$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \dfrac{C}{n+1}$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 \leq C\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$
  En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1 \leq 0$: c'est absurde.

2.4 Normes équivalentes et parties bornées

Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E qu'on suppose équivalentes.
Soit A une partie de E.
On a :
A est bornée dans l'espace vectoriel normé (E, N_1) si, et seulement si, A est bornée dans l'espace vectoriel normé (E, N_2)

Démonstration
N_1 et N_2 sont équivalentes donc :
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E\ aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$
Supposons que A est bornée dans l'espace vectoriel normé (E, N_1) :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in A\ N_1(x) \leq M$
On en déduit :
$\forall x \in A\ N_2(x) \leq bN_1(x) \leq bM$ indépendant de x
Donc A est borné dans l'espace vectoriel normé (E, N_2).

Réciproquement on suppose que A est borné dans l'espace vectoriel normé (E, N_2) :
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in A\ N_2(x) \leq M$
$\forall x \in A\ N_1(x) \leq \dfrac{1}{a} N_2(x) \leq \dfrac{M}{a}$ indépendant de x.
Donc A est borné dans l'espace vectoriel normé (E, N_1)

2.5 Normes équivalentes et suites convergentes

Soient E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E qu'on suppose équivalentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N_1) si, et seulement si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N_2)

Démonstration
N_1 et N_2 sont équivalentes donc :
$\exists (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E\ aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$
Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N_1).
Soit l sa limite.
$\forall n \in \mathbb{N}\ N_2(u_n - l) \leq bN_1(u_n - l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans l'espace vectoriel normé (E, N_1).

Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N_2).
Soit l sa limite.
$\forall n \in \mathbb{N}\ N_1(u_n - l) \leq \dfrac{1}{a} N_1(u_n - l) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans l'espace vectoriel normé (E, N_1).

2.6 Cas de la dimension finie

2.6.1 Equivalence des normes en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Toutes les normes sur E sont équivalentes.

2.6.2 Conséquences

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Soit A une partie de E.
  Il existe une norme N sur E telle que A soit bornée dans l'espace vectoriel normé (E, N) si, et seulement si, quelque soit la norme sur E N, A est bornée dans l'espace vectoriel normé (E, N).
  On peut donc dire que A est bornée, sans préciser la norme, étant entendu que A sera bornée quelque soit la norme, une fois qu'on l'aura prouvé pour une norme particulière bien choisie.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
  Il existe une norme N sur E telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N) si, et seulement si, quelque soit la norme sur E N, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé (E, N).
  On peut donc dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sans préciser la norme, étant entendu que

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera convergente quelque soit la norme, une fois qu'on l'aura prouvé pour une norme particulière bien choisie.

- **Utilisation d'une base de E**

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note $\begin{pmatrix} u_{p,1} \\ \vdots \\ u_{p,n} \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de u_p dans $\mathcal{B}$.
On a :
La suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la suite $(u_{p,i})_{p\in\mathbb{N}}$ converge
On a alors :
$\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{p,i}\right) e_i$

En d'autres termes, une suite à valeurs dans E converge si et seulement si ses coordonnées dans une base de E convergent et on a alors les coordonnées de la limite qui sont les limites des coordonnées.

En particulier si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ ev, on a si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$:
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\iff$ les suites $(\Re e(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$et $(\Im m(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent
et dans ce cas :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \Re e(u_n)\right) + i\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \Im m(u_n)\right)$

L'étude de la convergence d'une suite à valeurs dans un ev réel ou complexe de dimension finie peut donc se ramener à l'étude de la convergence de plusieurs suites réelles.

Autre exemple

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ soient $A_p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L = (l_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a :
$A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} L \iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{i,j}^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} l_{i,j}$

Démonstration de la proposition

On considère la norme $\|.\| \begin{cases} E \to \mathbb{R}_+ \\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i \mapsto \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \end{cases}$
(Il s'agit bien d'une norme : les vérifications sont faciles)

— $\Longrightarrow$

  On suppose $u_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} l = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i\, e_i$.
  Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
  $\forall p \in \mathbb{N} \; |u_{p,i} - l_i| \le \|u_p - l\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$
  Donc $u_{p,i} \xrightarrow[p\to+\infty]{} l_i$.

— $\Longleftarrow$

  On suppose que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $u_{p,i} \xrightarrow[p\to+\infty]{} l_i \in \mathbb{K}$.

On pose $l = \sum_{i=1}^{n} l_i\, e_i$.
$\forall p \in \mathbb{N}\ \ \|u_p - l\| = \max_{1\le i\le n} |u_{p,i} - l_i| \le \sum_{i=1}^{n} |u_{p,i} - l_i| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ comme somme de n (fixé et indépendant de p) suites qui tendent vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
Donc $\|u_p - l\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ ie $u_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} l$.

2.7 Convergence vers 0 des suites récurrentes linéaires

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}^p$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par :

(i) $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$

Dans le cas particulier où $p = 1$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = a_0 u_n$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison a_0.
Si $|a_0| < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quelque soit la valeur initiale u_0.
Si $a_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge donc vers sa valeur initiale.
Dans les autres cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sauf si $u_0 = 0$.

Dans le cas particulier où $p = 2$, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$.
Le polynôme caractéristique est $P = X^2 - a_1 X - a_0$.
Peu importe si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle ou complexe, on a :

- Si P a deux racines complexes simples r_1 et r_2 alors :
  $\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = A r_1^n + B r_2^n$
  Si $|r_1|$ et $|r_2| < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quelque soient les valeurs de u_0 et de u_1.
  Sinon la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de u_0 et de u_1.
- Si P a une racine double r alors :
  $\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (An + B) r^n$
  Si $|r| < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quelque soient les valeurs de u_0 et de u_1.
  Sinon la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de u_0 et de u_1.

Nous allons généraliser ce résultat au cas où $p \ge 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur de $\mathbb{K}^p$: $U_n = (u_n, \dots, u_{n+p-1})$.
Si on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence **(ii)** alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = v(U_n)$
où $v \begin{cases} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^p \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_2, \dots, x_p, a_0 x_1 + \dots + a_{p-1} x_p) \end{cases}$.
v est un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$.
Une récurrence facile donne :
$\forall n \in \mathbb{N}\ U_n = v^n(U_0)$
et nous sommes ramenés à un problème étudié dans le cours d'algèbre linéaire : déterminer les puissances d'un endomorphisme (ou dans sa version matricielle qu'on étudiera plus tard, déterminer les puissances d'une matrice carrée).

Différentes méthodes sont possibles mais ici on va mettre en évidence un polynôme annulateur de v.
Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ et (u_n) la suite définie par :

(i) $(u_0, \dots, u_{p-1}) = (x_1, \dots, x_p)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$

Soit $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$

$$\begin{aligned} P(v)(x) &= v^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k v^k(x) = v^p(U_0) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k v^k(U_0) = U_p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k U_k \\ &= (u_p, \dots, u_{p+p-1}) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k (u_k, \dots, u_{k+p-1}) \\ &= \left(u_p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_k, \dots, u_{p+i} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{k+i}, \dots, u_{p+p-1} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{k+p-1} \right) \\ &= (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc $P(v) = 0$.
Dans le cas où P est scindé à racines simples, v est diagonalisable et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ v^n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n p_k$
où les λ_k sont les racines de P et les p_k les projecteurs spectraux.
On a donc pour tout choix des conditions initiales :
$\forall n \in \mathbb{N}\ (u_n, \dots, u_{n+p-1}) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^n p_k((u_0, \dots, u_{p-1}))$
Si tous les λ_k sont de module strictement inférieurs à 1 alors $(u_n, \dots, u_{n+p-1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0, \dots, 0)$ et en particulier $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Remarque
Au passage, on a montré que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence **(ii)** alors elle est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où λ est racine de l'équation caractéristique $P(x) = 0$.

Dans la cas où P n'est pas scindé à racines simples, on effectue la division euclidienne de X^n par P :
$X^n = PQ_n + R_n$ avec R_n de degré inférieur ou égal à $p-1$. On peut donc écrire $R_n = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(n) X^k$.

$P(v) = 0$ donc $v^n = R_n(v) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(n) v^k$.
Il s'agit ensuite de déterminer les coefficients de R_n ie p nombres inconnus.
Si z est racine de multiplicité α de P alors z est racine de multiplicité au moins α de PQ_n donc :
$\forall k \in [\![0; \alpha - 1]\!]\ \left[(X^n)^{(k)} \right](z) = R_n^{(k)}(z)$
ce qui fournit α équations.

P étant scindé sur $\mathbb{C}$, on obtient avec toutes les racines de P, p équations.
On a montré dans le cours d'algèbre linéaire qu'elles étaient linéairement indépendantes donc elles permettent, au moins théoriquement, de calculer les coefficients de R_n.
On obtient :

$$\begin{pmatrix} c_0(n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{p-1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & \dots & \dots & z_1^{p-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1! & \dots & (p-1)\dots(p-1-\alpha_1+1)z_1^{p-1-\alpha_1} \\ \vdots \\ 1 & z_q & \dots & \dots & \dots & z_q^{p-1} \\ \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_q! & \dots & (p-1)\dots(p-1-\alpha_q+1)z_q^{p-1-\alpha_q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_1+1)z_1^{n-\alpha_1+1} \\ \vdots \\ z_q^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_q+1)z_q^{n-\alpha_q} \end{pmatrix}$$

où les z_k sont les racines de P comptées sans leurs multiplicités et les α_k leurs multiplicités.
Si les racines de P sont toutes de module strictement inférieur à 1 alors :

$$\begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_1+1)z_1^{n-\alpha_1+1} \\ \vdots \\ z_q^n \\ \vdots \\ n\dots(n-\alpha_q+1)z_q^{n-\alpha_q} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} c_0(n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{p-1}(n) \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$(u_n, \dots, u_{n+p-1}) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k(n) v^k((u_0, \dots, u_{p-1})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0, \dots, 0)$$

et en particulier $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quelques soient les conditions initiales.

Si P a une racine de module supérieur ou égal à 1 : λ alors la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence.
Si $\lambda \neq 1$ alors cette suite diverge.
Si $\lambda = 1$, elle converge mais sa limite n'est pas nulle.
Remarque
On suppose $a_0 \neq 0$, ce qui revient à supposer que 0 n'est pas racine de P.
Au passage, on a montré que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence **(ii)** alors elle est combinaison linéaire des suites $\left(n^k z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où z est une racine de P et k un entier strictement inférieur à la multiplicité de z.

3 Point adhérent à une partie

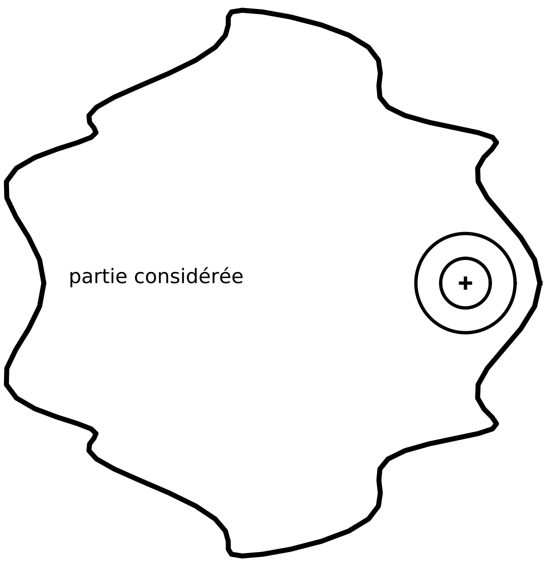
3.1 Introduction

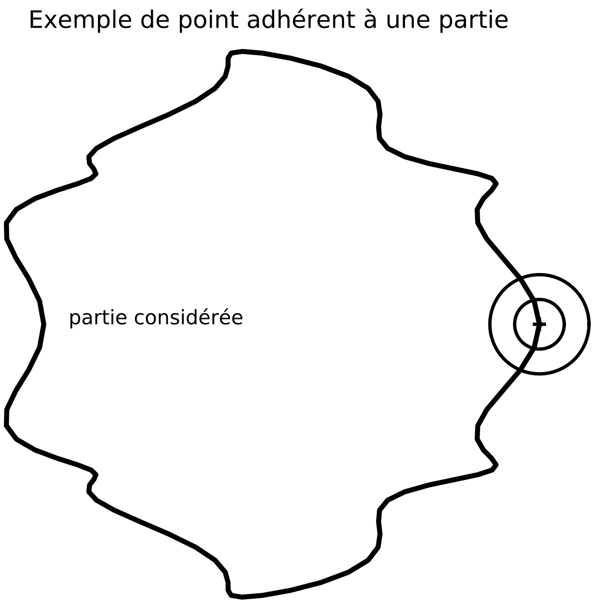
Nous avons vu que le cours sur les suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie diffère peu du cours de Sup sur les suites à valeurs réelles.
Pour les fonctions, ce n'est pas aussi simple. Il faut d'abord se demander où chercher la limite d'une fonction. Pour une fonction d'une seule variable définie sur un intervalle, c'est en un point de cet intervalle ou en une de ses extrémités, que celle-ci appartienne ou non à l'intervalle.
Il faut donc formaliser la notion de bord pour des parties d'un espace vectoriel de dimension finie, un plan par exemple.
D'où l'introduction de la notion de point adhérent.

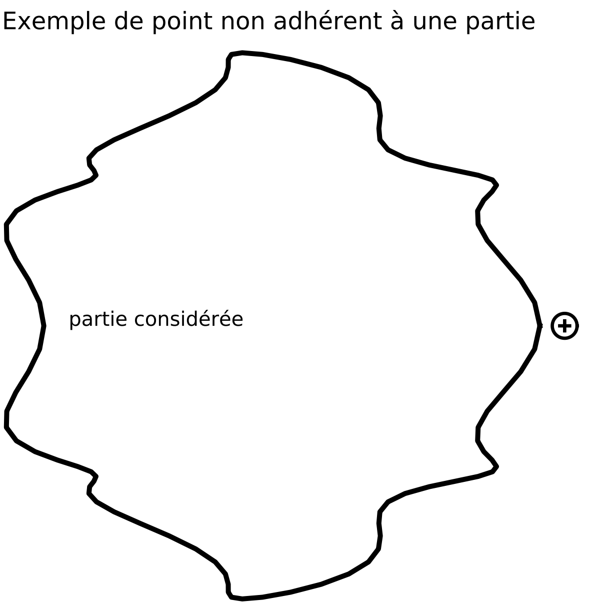
3.2 Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soient A une partie de E et a un élément de E.
On dit que a est un point adhérent à A si, et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$ $\mathcal{B}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.
Cela revient à dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$.
On observe immédiatement qu'un élément de A est nécessairement point adhérent à A.

Exemple de point adhérent à une partie







3.3 Point adhérent à une partie : exemples

- **Cas des intervalles de $\mathbb{R}$**
  Soient a et b deux réels tq $a < b$
  L'ensemble des points adhérents à $]a, b[$ est $[a, b]$.
  L'ensemble des points adhérents à $]a, b]$ est $[a, b]$.

L'ensemble des points adhérents à $[a, b[$ est $[a, b]$.
L'ensemble des points adhérents à $[a, b]$ est $[a, b]$.
L'ensemble des points adhérents à $]-\infty, a]$ est $]-\infty, a]$.
L'ensemble des points adhérents à $]-\infty, a[$ est $]-\infty, a]$.
L'ensemble des points adhérents à $]a, +\infty[$ est $[a, +\infty[$.
L'ensemble des points adhérents à $[a, +\infty[$ est $[a, +\infty[$.
L'ensemble des points adhérents à $[a, a] = \{a\}$ est $\{a\}$.
L'ensemble des points adhérents à $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble des points adhérents à $\emptyset$ est $\emptyset$.

- Cas de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
  Tout réel est point adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  En effet soit $x \in \mathbb{R}$.
  $\forall \epsilon > 0 \;]x - \epsilon; x + \epsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $]x - \epsilon; x + \epsilon[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$
  Donc x est point adhérent à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.4 Point adhérent à une partie : caractérisation séquentielle

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $a \in E$.
a est un point adhérent à $A \Leftrightarrow$ il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$
Les points adhérents à A sont les limites des suites convergentes d'éléments de A.

Démonstration

- $\Longrightarrow$
  On suppose a point adhérent à A.
  $\forall \epsilon > 0 \; \mathcal{B}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
  En particulier :
  $\forall n \in \mathbb{N} \; \mathcal{B}\left(a, \dfrac{1}{2^n}\right) \cap A \neq \emptyset$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $u_n \in \mathcal{B}\left(a, \dfrac{1}{2^n}\right) \cap A$ (donc $u_n \in A$)
  $\forall n \in \mathbb{N} \; \|u_n - a\| < \dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

- $\Longleftarrow$
  Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans A qui converge vers a.
  Soit $\epsilon > 0$
  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \; \|u_n - a\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

  Donc $u_{n_0} \in \mathcal{B}(a, \epsilon) \cap A$ et $\mathcal{B}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
  a est bien point adhérent à A.

Exemple
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soient $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ est $\mathcal{B}_f(x_0, r)$.
L'ensemble des points adhérents à $\mathcal{S}(x_0, r)$ est $\mathcal{S}(x_0, r)$.

Démonstration

Soit x un point adhérent à $\mathcal{B}_f(x_0, r)$.
Il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{B}_f(x_0, r)$ qui converge vers x.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|y_n - x_0\| \leq r$
On fait tendre n vers l'infini :
$\|x - x_0\| \leq r$ ie $x \in \mathcal{B}_f(x_0, r)$.

Réciproquement, si $x \in \mathcal{B}_f(x_0, r)$ alors x est un point adhérent à $\mathcal{B}_f(x_0, r)$.
Cf la définition et la remarque qui suit : tout élément de A est point adhérent à A. On peut aussi considérer $y_n = x$.
On raisonne de même pour $\mathcal{S}(x_0, r)$.

3.5 Adhérence d'une partie

3.5.1 Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit A une partie de E.
On appelle adhérence de A, l'ensemble des points adhérents à A.

3.5.2 Caractérisation séquentielle

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit A une partie de E.
L'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

C'est une conséquence directe de la définition de l'adhérence de A et de la caractérisation séquentielle des points adhérents.
Cela ne signifie pas que toute suite d'éléments de A converge. Cela signifie que si une suite d'éléments de A converge alors sa limite est un point adhérent à A et que réciproquement pour tout point adhérent à A il existe (au moins) une suite à valeurs dans A qui converge vers ce point.

3.5.3 Exemple

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soient $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
L'adhérence de $\mathcal{B}(x_0, r)$ est $\mathcal{B}_f(x_0, r)$.

Démonstration
Soit a un point adhérent à $\mathcal{B}(x_0, r)$.
Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{B}(x_0, r)$ qui converge vers a.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n - x_0\| < r$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|a - x_0\| \leq r$ ie $a \in \mathcal{B}_f(x_0, r)$.
On utilise ici la continuité de la norme, qui n'a pas encore été prouvée.
On peut s'en passer :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|a - x_0\| = \|a - x_n + x_n - x_0\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\|$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|a - x_0\| < \|a - x_n\| + r$
et en faisant tendre n vers $+\infty$: $\|a - x_0\| \leq r$

Réciproquement, soit $a \in \mathcal{B}_f(x_0, r)$.
Si $a \in \mathcal{B}(x_0, r)$ alors a appartient à l'adhérence de $\mathcal{B}(x_0, r)$: l'adhérence d'une partie de E contient toujours cette partie.
Si $\|a - x_0\| = r$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 + \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)(a - x_0)$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n - x_0\| = \left|1 - \dfrac{1}{2^n}\right| \|a - x_0\| = \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) r$
$1 - \dfrac{1}{2^n} < 1$ et $r > 0$ donc $\|x_n - x_0\| < r$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans $\mathcal{B}(x_0, r)$ et elle converge vers $x_0 + a - x_0 = a$ qui est donc bien un point adhérent à $\mathcal{B}(x_0, r)$.

3.6 Parties denses

3.6.1 Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Soit A une partie de E.
On dit que A est dense si, et seulement si, l'adhérence de A est égale à E.
Cela revient à dire que tout élément de E est la limite d'une suite d'éléments de A.

3.6.2 Exemples

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

- Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle.
  $GL(E)$, l'ensemble des automorphismes de E est dense dans $\mathcal{L}(E)$.
  En d'autres termes, tout endomorphisme de E est la limite d'une suite d'automorphismes de E.

  En effet soit u un endomorphisme de E.
  On a vu que le spectre de u est fini.
  Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{1}{n}$ n'est pas valeur propre de u.
  Cela signifie que $u - \dfrac{1}{n} id_E$ est injective mais comme E est de dimension finie, cela revient à dire que $u - \dfrac{1}{n} id_E$ est un automorphisme de E.
  $\left(u - \dfrac{1}{n} id_E\right)_{n \geq n_0}$ est une suite d'automorphismes de E qui converge vers u.
- On se place dans l'espace vectoriel normé $((\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$.
  $F = \{f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ tq $f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel dense dans $\mathcal{C}([0;1])$.
  Cela revient à dire que toute fonction de $\mathcal{C}([0;1])$ est la limite d'une suite d'éléments de F.
  Soit $f \in \mathcal{C}([0;1])$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \geq \dfrac{1}{n} \\ x \mapsto nxf\left(\dfrac{1}{n}\right) \text{ si } x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$.

f_n est clairement continue sur $\left[\frac{1}{n};1\right]$ et sur $\left[0;\frac{1}{n}\right[$. De plus $f_n(x) \underset{\substack{x\to 1/n\\ x<1/n}}{\longrightarrow} f\left(\frac{1}{n}\right)$ donc f est continue sur $[0;1]$.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\ \|f_n-f\|_1 &= \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\ \mathrm{d}x = \int_0^{1/n} |nxf_n(x)-f(x)|\ \mathrm{d}x\\ &\le \int_0^{1/n}\left(nx\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^{1/n}\left(\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|+|f(x)|\right)\mathrm{d}x\\ &\le \frac{2}{n}\|f\|_\infty\end{aligned}$$

On en déduit $\|f_n-f\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace vectoriel normé $((\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$.

4 Limite et continuité en un point

4.1 Définition de la limite en un point

Soient $(E,\|.\|)$ et $(F,\|.\|)$ deux espaces vectoriels normés[1], A une partie non vide de E, a un point de E adhérent à A et $f : A\to F$.
Etant donné un élément l de F on dit que f admet l comme limite au point a si et seulement si :

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tq } \forall x\in A\ \ \|x-a\|\le\delta \Longrightarrow \|f(x)-l\|\le\epsilon$$

Lorsqu'un tel élément l de F existe on dit que f admet une limite au point a.

Proposition
Sous les hypothèses précédentes, si f admet une limite au point a elle est unique.

Démonstration
Supposons que f admette l et l' comme limites au point a.
Soit $\epsilon>0$.
$\exists\delta>0$ tq $\forall x\in A\ \ \|x-a\|\le\delta \Longrightarrow \|f(x)-l\|\le\epsilon$
$\exists\delta'>0$ tq $\forall x\in A\ \ \|x-a\|\le\delta' \Longrightarrow \|f(x)-l'\|\le\epsilon$
Soit $\eta=\min(\delta,\delta')>0$.
a est point adhérent à A donc :
$\exists x\in A$ tq $\|x-a\|<\eta\le\delta$ et δ'
On a $\|f(x)-l\|\le\epsilon$ et $\|f(x)-l'\|\le\epsilon$ donc :
$\|l-l'\|\le\|l-f(x)\|+\|f(x)-l'\|\le 2\epsilon$.
On a donc :
$\forall\epsilon>0\ 0\le\|l-l'\|\le 2\epsilon$
On en déduit $\|l-l'\|=0$ ie $l=l'$.

1. ce ne sont pas forcément deux $\mathbb{R}$-ev ou deux $\mathbb{C}$-ev : l'un peut être un $\mathbb{C}$-ev et l'autre un $\mathbb{R}$-ev. La norme n'est évidemment pas la même sur les deux espaces. On note de la même façon la norme sur E et la norme sur F afin de ne pas alourdir les notations

Notations
On suppose qu'on est dans les conditions de la définition.
Si f admet l comme limite au point a alors l est unique et on le note $l = \lim\limits_{a} f$ ou $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
On écrit aussi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.
On a donc :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - l\| \leq \epsilon}$$

qu'on peut aussi écrire :
$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in A\ d(x, a) \leq \delta \implies d(f(x), l) \leq \epsilon$
ou encore :
$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tq } f\left(A \cap \mathcal{B}_f(a, \delta)\right) \subset \mathcal{B}_f(l, \epsilon)$

4.2 Remarques

- On suppose qu'on est dans les conditions de la définition.

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l &\iff f(x) - l \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ &\iff \|f(x) - l\| \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{aligned}$$

  (Les trois définitions s'écrivent de la même façon)

- **Proposition**
  Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, a un point de E adhérent à A et $f : A \to F$.
  On suppose qu'il existe $\varphi : A \to \mathbb{R}$ et $r > 0$ telle que :
  — $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq r \implies \|f(x) - l\| \leq \varphi(x)$
  — $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
  ie la fonction $\|f - l\|$ est localement majorée par une fonction réelle qui admet 0 comme limite au point a.
  Cette condition est réalisée en particulier si il existe $\varphi : A \to \mathbb{R}$ telle que :
  — $\forall x \in A\ \|f(x) - l\| \leq \varphi(x)$
  — $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
  ie la fonction$\|f - l\|$ est majorée globalement par une fonction réelle qui admet 0 comme limite au point a.
  Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.
  Cette proposition est en général d'usage plus commode que la définition.

  Démonstration
  Soit $\epsilon > 0$.
  $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ donc :
  $\exists \delta_1 > 0 \text{ tq } \forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta_1 \implies \varphi(x) \leq \epsilon$
  (φ est clairement positive)
  Soit $\delta = \min(r, \delta_1) > 0$.
  Pour tout $x \in A$ tq $\|x - a\| \leq \delta$ on a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - l\| &\leq \varphi(x) \text{ car } \|x - a\| \leq r \\ &\leq \epsilon \text{ car } \|x - a\| \leq \delta_1 \end{aligned}$$

Exemple

Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\end{cases}$.

Montrer que f possède une limite en $(0,0)$ et la déterminer.

Démonstration

On utilise les coordonnées polaires.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$\exists (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi;\pi]$ tq $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta)\end{cases}$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$x^3+y^3 = r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$ donc :
$|x^3+y^3| \leq 2r^3$
On en déduit :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ |f(x,y)| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$.
On en déduit que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

4.3 Espaces de dimension finie

Si E et F sont de dimension finie, le choix de la norme est sans importance :
Supposons que f admette l comme limite au point a dans les espaces vectoriels normés $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$.
Changeons de norme dans chacun des deux espaces et notons les N.
E et F étant de dimensions finies :
$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E\ C_1\|x\| \leq N(x) \leq C_2\|x\|$
$\exists (D_1, D_2) \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall x \in E\ D_1\|x\| \leq N(x) \leq D_2\|x\|$
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x-a\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \dfrac{\epsilon}{C_2}$
Supposons $x \in A$ et $N(x-a) \leq D_1\delta$
$\|x-a\| \leq \dfrac{1}{D_1}N(x-a) \leq \delta$ donc $\|f(x)-l\| \leq \dfrac{\epsilon}{C_2}$
et $N(f(x)-l) \leq C_2\|f(x)+l\| \leq \epsilon$
f admet donc l comme limite au point A dans les espaces vectoriels normés (E,N) et (F,N).
La réciproque est vraie : il suffit d'inverser le rôle des normes (pour être précis la relation "être équivalentes" est une relation d'équivalence sur les normes)

4.4 Cas $a \in A$, continuité en un point

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \to F$.
Soit $a \in A$ (donc a point adhérent à A).
On suppose que f admet une limite au point a et on note $l = \lim\limits_a f$.
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x-a\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x)-l\| \leq \epsilon$
$\|a-a\| = 0 \leq \delta$ donc $\|f(a)-l\| \leq \epsilon$ et ce pour tout $\epsilon > 0$.
On en déduit que $l = f(a)$.

ie : lorsque $a \in A$, si f admet une limite au point a c'est forcément $f(a)$.

Définition
Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, $a \in A$ et $f : A \to F$.
On dit que f est continue au point a si et seulement si f admet une limite au point a.
On a donc :

$$f \text{ continue au point } a \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

4.5 Cas $a \notin A$, prolongement par continuité

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $f : A \to F$.
Soit a un point adhérent à A n'appartenant pas à A.
Si f admet une limite $l \in F$ au point a alors la fonction :

$$g \begin{cases} A \cup \{a\} \to F \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x \neq a \\ a \mapsto \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases}$$

est un prolongement de f continu au point a et c'est le seul.
(On doit avoir $g(a) = \lim\limits_{x \to a} g_{|A}(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$)
g s'appelle alors le prolongement par continuité de f en a et on dit que f est prolongeable par continuité en a.
Réciproquement d'après les paragraphes précédents si f possède un prolongement par continuité en a : g on a
$f(x) = g_{|A}(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$ donc f a une limite au point a.

Proposition
Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, a un point de E adhérent à A n'appartenant pas à A et $f : A \to F$.
f admet une limite au point $a \iff f$ est prolongeable par continuité en a

4.6 Utilisation d'une base de F

Proposition
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, F un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.
Soient A une partie non vide de E et a un point de E adhérent à A.
Soient $f : A \to F$ et $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{K}$ les coordonnées de f ie :
$\forall x \in A \ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$
Soit $l = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i e_i \in F$.
Alors on a :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \forall i \in [\![1; n]\!] \ f_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_i$$

En particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{C}$ on a :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \iff \Re e(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \Re e(l) \text{ et } \Im m(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \Im m(l)$$

Remarque
Dans le cas général, on ne précise pas la norme sur F car elles sont toutes équivalentes si bien que le choix de la norme est sans importance.
Démonstration
On munit F de $\|.\| \begin{cases} F \to \mathbb{R}_+ \\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i \mapsto \max\limits_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \end{cases}$.

- $\Longrightarrow$
  On suppose $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.
  Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
  $\forall x \in A\ |f_i(x) - l_i| \leq \|f(x) - l\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$
  Donc $f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_i$ (cf 4.2)
- $\Longleftarrow$
  On suppose que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_i$
  Soit $\epsilon > 0$.
  $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \exists \delta_i > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| \leq \epsilon$
  Soit $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_n) > 0$.
  Pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leq \delta$ on a :
  $\forall i \in [\![1;n]\!]\ |f_i(x) - l_i| \leq \epsilon$
  Donc $\|f(x) - l\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(|f_i(x) - l_i|) \leq \epsilon$
  Donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Corollaire
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, F un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$, A une partie non vide de E, $a \in A$ et $f : A \to F$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{K}$ les coordonnées de f.
On a alors :

$$f \text{ est continue en } a \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!]\ f_i \text{ est continue en } a$$

4.7 Limite d'une application composée

- **Proposition**
  Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ et $(G, \|.\|)$ trois espaces vectoriels normés.
  Soient A une partie non vide de E, a un point adhérent à A et $f : A \to F$.
  Soient B une partie non vide de F et $g : B \to G$.
  On suppose $f(A) \subset B$.
  — Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in F$ alors b est un point adhérent à $f(A)$ donc aussi à B.
  — Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et si $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l$ alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

  Démonstration
  — Soit $\epsilon > 0$.
  $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - b\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$
  a est un point adhérent à A donc il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\| < \delta$.
  On a alors $f(x) \in f(A) \cap \mathcal{B}(b, \epsilon)$ donc $f(A) \cap \mathcal{B}(b, \epsilon) \neq \emptyset$ et b est bien un point adhérent à $f(A)$.
  — Soit $\epsilon > 0$.
  $\exists \delta > 0$ tq $\forall y \in B\ \|y - b\| \leq \delta \Longrightarrow \|g(y) - l\| \leq \epsilon$ (car $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l$)
  $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - b\| \leq \delta$ (car $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$)

On a alors :
$\forall x \in A\ \|x-a\| \leq \eta \Longrightarrow \|g(f(x))-l\| \leq \epsilon$
D'où : $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

- **Corollaire**
  Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ et $(G, \|.\|)$ trois espaces vectoriels normés.
  Soient A une partie non vide de E et $f : A \to F$.
  Soient B une partie non vide de F et $g : B \to G$.
  On suppose $f(A) \subset B$.
  Soit $a \in A$.
  Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

- **Exemple d'application**
  Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, a un point de E adhérent à A et $f : A \to \mathbb{K}$.
  On suppose : $\begin{cases} \forall x \in A\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \neq 0 \end{cases}$
  Alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{1}{l}$.
  (La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant continue sur $\mathbb{K}^*$)

4.8 Limite d'une somme

4.8.1 Théorème

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et a un point adhérent à A.
Soient f_1 et $f_2 : A \to F$ admettant une limite au point a.
Alors $f_1 + f_2$ admet une limite au point a et on a :

$$\lim_a (f_1 + f_2) = \lim_a f_1 + \lim_a f_2$$

En d'autres termes si $f_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \in F$ et si $f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2 \in F$ alors $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 + l_2$.

Démonstation
Soient $l_1 = \lim_a f_1$ et $l_2 = \lim_a f_2$.
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta_1 > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x-a\| \leq \delta_1 \Longrightarrow \|f_1(x) - l_1\| \leq \epsilon$
$\exists \delta_2 > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x-a\| \leq \delta_2 \Longrightarrow \|f_2(x) - l_2\| \leq \epsilon$
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$.
Pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\| \leq \delta$, on a :
$\|(f_1+f_2)(x) - (l_1+l_2)\| = \|f_1(x) - l_1 + f_2(x) - l_2\| \leq \|f_1(x) - l_1\| + \|f_2(x) - l_2\| \leq 2\epsilon$
D'où le résultat.

4.8.2 Continuité de la somme de deux fonctions continues

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et $a \in A$.
Soient f_1 et $f_2 : A \to F$ deux fonctions continues en a.
Alors $f_1 + f_2$ est continue en a.

4.9 Limite d'un produit

4.9.1 Théorème

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.
Soient A une partie non vide de E et a un point adhérent à A.
Soient $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$.
Si φ et f admettent une limite au point a alors $\varphi f : A \to F$ admet aussi une limite au point a et on a :

$$\lim_a (\varphi f) = \left(\lim_a \varphi\right) . \left(\lim_a f\right)$$

En d'autres termes si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \in F$ et si $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda \in \mathbb{K}$ alors : $\varphi(x) f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l$.

En particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λf admet une limite au point a et on a :

$$\lim_a (\lambda f) = \lambda \lim_a f$$

Autre cas particulier : $F = \mathbb{K}$.

Démonstation
Soient $l = \lim_a f$ et $\lambda = \lim_a \varphi$.
On commence par prouver que f est bornée au voisinage de a.
$1 > 0$ donc :
$\exists \delta_1 > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta_1 \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq 1$
On a alors pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leq \delta_1$:
$\|f(x)\| \leq \|f(x) - l\| + \|l\| \leq 1 + \|l\|$

$$\begin{aligned} \forall x \in A\ \varphi(x) f(x) - \lambda l &= \varphi(x) f(x) - \lambda f(x) + \lambda f(x) - \lambda l \\ &= (\varphi(x) - \lambda) f(x) + \lambda (f(x) - l) \end{aligned}$$

$\forall x \in A\ \ \|\varphi(x) f(x) - \lambda l\| \leq |\varphi(x) - \lambda|\ \|f(x)\| + |\lambda|\ \|f(x) - l\|$
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta_2 > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta_2 \Longrightarrow |\varphi(x) - \lambda| \leq \epsilon$
$\exists \delta_3 > 0$ tq $\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta_3 \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \epsilon$
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$.
$\forall x \in A\ \|x - a\| \leq \delta \Longrightarrow \|\varphi(x) f(x) - \lambda l\| \leq (1 + \|l\| + |\lambda|)\epsilon$ (de la forme $K\,\epsilon$ avec $K > 0$ et indépendant de ϵ, δ ou x)

4.9.2 Continuité du produit de deux fonctions continues

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.
Soient A une partie non vide de E et $a \in A$.
Soient $f : A \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues en a.
Alors φf est continue en a.
En particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ λf est continue en a.
Autre cas particulier $F = \mathbb{K}$.

4.10 Utilisation des suites

4.10.1 Proposition

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et a un point adhérent à A.

Soient $f : A \to F$ et $l \in F$.
Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ alors pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Démonstration
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in A$ $\|x - a\| \leq \delta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leq \epsilon$ (car $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$)
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $\|u_n - a\| \leq \delta$ (car $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$)
Donc :
$\forall n \geq n_0$ $\|f(u_n) - l\| \leq \epsilon$
D'où : $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

Remarque
Ce résultat est utile pour déterminer la limite d'une suite mais aussi pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en un point :
sous les hypothèses précédentes supposons qu'on trouve 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui convergent vers a et telles que :
$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1 \in F$ et $f(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_2 \in F$ avec $l_1 \neq l_2$.
Alors f n'admet pas de limite au point a.

4.10.2 Réciproque

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E et a un point adhérent à A.
Soient $f : A \to F$ et $l \in F$.
On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a on a $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Démonstration
On raisonne par l'absurde : on suppose que $f(x)$ ne tend pas vers l en a.

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tq } \forall \delta > 0\ \exists x \in A \text{ tq } \begin{cases} \|x - a\| \leq \delta \\ \text{et} \\ \|f(x) - l\| > \epsilon \end{cases}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists u_n \in A \text{ tq } \begin{cases} \|u_n - a\| \leq \dfrac{1}{n+1} \\ \text{et} \\ \|f(u_n) - l\| > \epsilon \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\|u_n - a\| \leq \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.
Donc $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|f(u_n) - l\| > \epsilon$ On aboutit à une contradiction donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

4.10.3 Caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point

Soient $(E, \|.\|)$, $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, $a \in A$ et $f : A \to F$.
f est continue en $a \Longleftrightarrow$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$