ALGEBRE LINEAIRE
2025-2026
Correction des exercices du troisième chapitre du cours

Exercice 1 *(Mines 2017)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.
Montrer que la trace de A est nulle.

Correction
Soit λ une valeur propre complexe de A.
$\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $AX = \lambda X$
$-X = -I_n X = A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$ donc :
les valeurs propres complexes de A vérifient $\lambda^2 = -1$ donc $\lambda = \pm i$
Comme A est réelle i et $-i$ ont la même multiplicité et la somme de leurs multiplicités vaut n.
Donc forcément n est pair et i et $-i$ sont de multiplicité $\dfrac{n}{2}$.
On en déduit $\operatorname{tr}(A) = \dfrac{n}{2} i + \dfrac{n}{2}(-i) = 0$

Exercice 2 *(Centrale 99)*

CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable ?

Correction
Soit n la taille de la matrice.
Si $n = 1$, la matrice est diagonalisable car diagonale.
On suppose donc $n \geq 2$.
Le noyau de A est de dimension $n - 1 > 0$.
On en déduit que 0 est valeur propre de A de multiplicité supérieure ou égale à $n - 1$.
Ls valeurs propres de A sont donc $0, \ldots, 0, \lambda$.
A cause de la somme des valeurs propres, $\lambda = \operatorname{tr}(A)$.
Si $\operatorname{tr}(A) = 0$ alors 0 est de multiplicité n et le sous-espace propre associé de dimension $n - 1$:
A n'est pas diagonalisable.
Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ alors la dimension de $E_0(A)$ est égale à la multiplicité de 0.
$\lambda = \operatorname{tr}(A)$ étant une valeur propre simple, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité.
Dans ce cas, A est diagonalisable.
Finalement :
A diagonalisable $\Longleftrightarrow \operatorname{tr}(A) \neq 0$.
Autre méthode
A est de rang 1 donc la famille de ses vecteurs colonnes est de rang 1.

Il existe donc $j_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que :
$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \exists y_k \in \mathbb{K}$ tq $C_k(A) = y_k C_{j_0}(A)$.
On pose $X = C_{j_0}(A)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
Le coefficient de la matrice XY^T situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est $x_i y_j$.
La j-ème colonne de la matrice XY^T est donc $y_j X = y_j C_{j_0}(A) = C_j(A)$.
On en déduit $A = XY^T$.
On a alors $A^2 = (XY^T)(XY^T) = X(Y^TX \in \mathbb{C})Y^T = (Y^TX)XY^T = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) XY^T = \mathrm{tr}\,(A)A$
En d'autres termes, $X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X$ est un polynôme annulateur de A.
Si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 0$, $X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X = X(X - \mathrm{tr}\,(A))$ est scindé à racines simples et A est diagonalisable.
Si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ alors $A^2 = 0$ donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$.
A est de rang $1 < n$ (on a supposé $n \geq 2$) donc A n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A.
On en déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Donc si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que $A = P\mathrm{Diag}(0, \ldots, 0)P^{-1}$.
A est donc nulle, ce qui est absurde.
Si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ alors A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 *(CCP 2023)*

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b, c, d) pour que A soit diagonalisable.

Correction
$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -b \\ 0 & \lambda - 1 & -c \\ 0 & 0 & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - d)$
$\chi_A = (X - 1)^2(X - d)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

- **Premier cas :** $d = 1$
  $\chi_A = (X - 1)^3$, A a une seule valeur propre, 1, de multiplicité 3.
  Dans ce cas :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \dim\,(E_1(A)) = 3 \\ &\iff A = I_3 \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

  Deuxième cas : $d \neq 1$
  A a deux valeurs propres 1 double et d simple.
  Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours de dimension 1 donc :

A diagonalisable $\iff \dim\left(E_1(A)\right) = 2$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$X \in E_1(A) \iff \begin{cases} x + ay + bz = x \\ y + cz = y \\ dz = z \end{cases} \iff \begin{cases} ay + bz = 0 \\ cz = 0 \\ (d-1)z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{car } d \neq 1$$

Si $a \neq 0$:
$X \in E_1(A) \iff y = z = 0$

$E_1(A)$ est la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 1.

Si $a = 0$, $E_1(A)$ est le plan d'équation $z = 0$ dont la dimension est 2.

Finalement :
A diagonalisable $\iff (a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$ ou $(a = 0$ et $d \neq 1)$

Exercice 4 *(CCP 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$ et $\mathrm{tr}\,(A) = 0$.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^n est non nulle.

Correction
Le noyau de A est de dimension $n-2$ donc 0 est racine de multiplicité au moins $n-2$ de χ_A.
Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0$ avec $n-2$ 0.
A cause de la trace $\lambda_2 = -\lambda_1$.
Si $\lambda_1 \neq 0$ alors A a 3 valeurs propres : λ_1 simple, $-\lambda_1$ simple et 0 de multiplicité $n-2$.
La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $n-2$ donc égale à sa multiplicité.
La dimension du sous-espace propre d'une valeur propre simple est toujours 1 donc égale à sa multiplicité. A est donc diagonalisable.
Si $\lambda_1 = 0$ alors A a une seule valeur propre : 0, de multiplicité n. Mais la dimension du sous-espace propre associé n'est que de $n-2$ donc A n'est pas diagonalisable.

Si on suppose A diagonalisable alors il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, -\lambda_1, 0, \ldots, 0)$ avec $\lambda_1 \neq 0$.
On a alors $P^{-1}A^nP = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^n, (-\lambda_1)^n, 0, \ldots, 0\right) \neq 0$ donc A^n est non nulle.
Si on suppose que A n'est pas diagonalisable alors $\lambda_1 = 0$ donc 0 est valeur propre de multiplicité n de A ie $\chi_A = X^n$.
Par Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.
Par contrapposition, si $A^n \neq 0$ alors A est diagonalisable.

Exercice 5 *(CCP 2024)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max\left(\mathrm{Sp}(A)\right)$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$.
   Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.
2. Montrer que :
   $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \ \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   Montrer :
   $\forall i \ni [\![1;n]\!] \ \ |\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$
   En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.
4. Montrer :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ \forall k \in \mathbb{N} \ \rho(A^k) = \rho(A)^k$
5. On suppose que A est diagonalisable.
   Montrer :
   $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$

Correction

1. $\chi_A = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1-i \\ 0 & \lambda - \mathrm{e}^{i\theta} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \mathrm{e}^{i\theta}\right)$.
   Les valeurs propres de A sont 1 et $\mathrm{e}^{i\theta}$ simples si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et 1 double si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
   $\rho(A) = 1$.
   $\|A\| = \max\left(1 + |1+i|, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$
2.
$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} |(AB)_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| \right) \end{aligned}$$

   Attention : on ne peut pas écrire $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \times \sum_{j=1}^{n} |b_{j,k}|$ car ce produit n'a pas de sens.

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} |(AB)_{i,j}| &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \, \|B\| \right) = \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \\ &\leq \|A\| \, \|B\| \ \text{ indépendant de } i \end{aligned}$$

   D'où le résultat.
3. $AX = \lambda X$ donc :
   $\forall i \in [\![1;n]\!] \ \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1;n]\!]\ |\lambda x_i| &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^{n} (|a_{i,j}|\,|x_j|)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (|a_{i,j}|\,\|X\|_\infty) = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\\ &\leq \|A\|\,\|X\|_\infty\end{aligned}$$

On en déduit $|\lambda|\,\|X\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty \leq \|A\|\,\|X\|_\infty$
X est non nul donc $\|X\|_\infty > 0$ et $|\lambda| \leq \|A\|$.
Comme c'est vrai pour toutes les valeurs propres de A, $\rho(A) \leq \|A\|$

4. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la liste des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités de A.
La liste des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités de A est alors $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$
Le plus simple est d'utiliser la trigonalisation, ce qui sera fait en cours. Mais on peut utiliser le polynôme caractéristique.
Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/k}$
$X^k - z^k = \prod_{l=0}^{k-1}(X - z\omega^l)$ donc $z^k - X^k = (-1)^{k+1}\prod_{l=0}^{k-1}\left(z\omega^l - X\right)$

$$\begin{aligned}\forall \mu \in \mathbb{N}\ \chi_{A^k}(\mu^k) &= \det\left(\mu^k I_n - A^k\right) = \det\left((-1)^{k+1}\prod_{l=0}^{k-1}(\mu\omega^l I_n - A)\right)\\ &= (-1)^{(n+1)(k+1)}\prod_{l=0}^{k-1}\chi_A\left(\mu\omega^l\right)\\ &= (-1)^{(n+1)(k+1)}\prod_{l=0}^{k-1}\prod_{p=1}^{n}\left(\mu\omega^l - \lambda_p\right) = (-1)^{(n+1)(k+1)}\prod_{p=1}^{n}\prod_{l=0}^{k-1}\left(\mu\omega^l - \lambda_p\right)\\ &= (-1)^{(n+1)(k+1)}\prod_{p=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\left(\mu^k - \lambda_p^k\right)\right)\\ &= \prod_{p=1}^{n}\left(\mu^k - \lambda_p^k\right)\end{aligned}$$

On en déduit $\chi_{A^k} = \prod_{p=1}^{n}\left(X - \lambda_p^k\right)$.

5. $\exists P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
$\forall k \in \mathbb{N}\ P^{-1}A^kP = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)$
   - Si (A^k) converge vers 0 et il en est de même de la suite $\left(\mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)\right)$.
   Tous les coefficients de cette matrice convergent vers 0 donc pour tout i compris entre 1 et n, $|\lambda_i| < 1$.
   Donc $\rho(A) < 1$.
   - Si $\rho(A) < 1$, tous les λ_i sont de module strictement inférieur à 1 donc les suites $\left(\lambda_i^k\right)$ convergent toutes vers 0.
   On en déduit que la suite $\left(\mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)\right)$ converge vers la matrice nulle.
   Mais :
   $\forall k \in \mathbb{N}\ A^k = P\mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right)P^{-1}$
   Donc la suite (A^k) converge vers la matrice nulle.

Exercice 6 *(Centrale maths 2 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est stochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{i,j} \geq 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1;n]\!] \; \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
- On dit que A est bistochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{i,j} \geq 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1;n]\!] \; \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
  (iii) $\forall j \in [\![1;n]\!] \; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$
- On dit que A est strictement bistochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{i,j} > 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1;n]\!] \; \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
  (iii) $\forall j \in [\![1;n]\!] \; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.
   Montrer que A est bistochastique si, et seulement si, $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre des matrices A et A^T pour la valeur propre 1.
2. Montrer que le produit de deux matrices strictement bistochastiques est une matrice strictement bistochastique.
3. On donne deux matrices bistochastiques, une à trois lignes et trois colonnes, une à quatre lignes et quatre colonnes.
   On demandait de faire des conjectures sur les valeurs propres des matrices stochastiques ainsi que sur leurs puissances à l'aide de l'ordinateur.
4. Démontrer la conjecture de la question 3.
   Remarque
   Il s'agit a priori de prouver que si A est stochastique alors toute valeur propre complexe de A est de module inférieur ou égal à 1.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
   Montrer que $|x_1| = \cdots = |x_n|$ et que X est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.
   Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.
   Soit H le sev de $\mathbb{C}^n$ défini par :
   $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

   Montrer que H est un supplémentaire de $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ stable par u.

7. ?

Correction

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.
   On note $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = AC$ et $Y = A^T C$.
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} c_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$
   $\forall i \in [\![1;n]\!]\ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} c_j = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}$
   On a donc :
   $$A \text{ bistochastique } \iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ x_i = y_i = 1 \iff X = Y = C \iff AC = A^T C = C$$
   C étant non nul, on conclut facilement.
2. Soient A et B deux matrices strictement bistochastiques.
   $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k} > 0) \times (b_{k,j} > 0) > 0$
   De plus :
   $(AB)C = A(BC) = AC = C$ et $(AB)^T C = (B^T A^T)C = B^T(A^T C) = B^T C = C$
   Donc AB est une matrice strictement bistochastique.
3.
4. Soit λ une valeur propre complexe de A stochastique et X un vecteur propre associé.
   $\exists i_0 \in [\![1;n]\!]$ tq $|x_{i_0}| = \max\limits_{1 \le i \le n} (|x_i|) = \|X\|_\infty$.
   $$\begin{aligned} |\lambda|\,\|X\|_\infty &= |\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| \text{ car les coefficients de } A \text{ sont positifs} \\ &\le \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,\|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} = \|X\|_\infty \end{aligned}$$
   X est un vecteur propre donc X est non nul et $\|X\|_\infty > 0$.
   On a donc $|\lambda| \le 1$.

5. Dans cette question $\lambda = 1$.
Toutes les inégalités précédentes deviennent des égalités. En particulier :
$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} |x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \|X\|_\infty$ avec $a_{i_0,j} |x_j| \leq a_{i_0,j} \|X\|_\infty$
Donc :
$\forall j \in [\![1;n]\!]\ a_{i_0,j} |x_j| = a_{i_0,j} \|X\|_\infty$ avec $a_{i_0,j} > 0$ par hypothèse
Donc :
$\forall j \in [\![1;n]\!]\ \ |x_j| = \|X\|_\infty$
On a également :
$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j} x_j|$
donc les $a_{i_0,j} x_j$ sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires.
Les $a_{i_0,j}$ étant strictement positifs, les x_j sont $\mathbb{R}_+$-colinéaires. Comme ils ont le même module, ils sont égaux.

6. H est un sev de $\mathbb{C}^n$ de dimension $n-1$ ne contenant pas $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

$H \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}^n$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H$.

$u(x) = Ax = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= U^T y \text{ avec } U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= U^T A x = \left(A^T U\right)^T x \\ &= U^T x \text{ car } A \text{ est bistochastique} \\ &= 0 \text{ car } x \in H \end{aligned}$$

Donc $y = u(x) \in H$ et H est stable par u.

Exercice 7 *(Centrale maths 2 2019)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$\begin{cases} (u_0, \ldots, u_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \dfrac{1}{p}\left(u_{n+p-1} + \cdots + u_n\right) \end{cases}$.

1. Dans cette question, $p = 3$.

(a) Ecrire une implémentation Python pour calculer u_n en fonction de a, b, c avec $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$.

Réponse

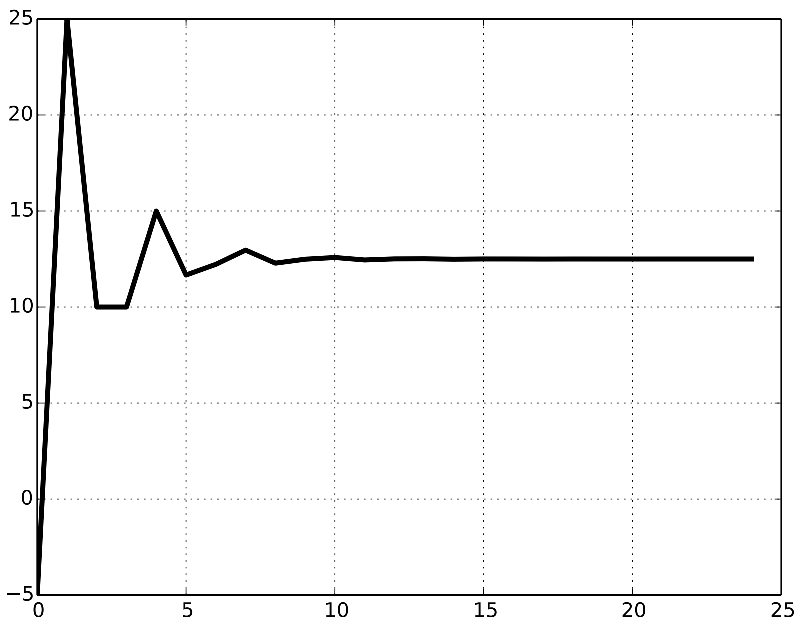
```
def u(n,a,b,c):
    if n==0:
        return a
    elif n==1:
        return b
    elif n==2:
        return c
    else:
        p=3
        for i in range(3,n+1):
            a,b,c=b,c,(a+b+c)/3.
        return c
```

(b) Essayer différentes valeurs de a, b et c et conjecturer la convergence.

Réponse

```
import matplotlib.pyplot as pypl

les_n=[n for n in range(25)]
les_u=[u(n,-5,25,10) for n in les_n]
pypl.plot(les_n,les_u,color='black',linewidth=3)
pypl.grid()
pypl.show()
```



(c) Montrer la convergence.

2. Pour $p \geq 1$, soit $Q_p = pX^p - X^{p-1} - \cdots - X - 1$.
Vérifier sur Python que, en dehors de 1, les racines de Q_p sont de modules strictement

inférieurs à 1.

Réponse

```
from numpy.polynomial import Polynomial
import numpy
p=5
Qp=Polynomial([-1]*p+[p])
Racines=Qp.roots()
print(numpy.abs(Racines))
[ 0.64624413  0.64624413  0.69201959  0.69201959  1.         ]
```

3. Démontrer que si z est racine de Q_p alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.
4. Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. (a) Cf l'énoncé.

   (b) Cf l'énoncé.

   (c) Ce qu'accepte l'examinateur sans justification n'est pas clair.

   Pour rester conforme, au programme, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = AU_n$

   $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n = A^n U_0$

   $\chi_A = X^3 - \dfrac{1}{3}X^2 - \dfrac{1}{3}X - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(3X^3 - X^2 - X - 1)$ sans problème

   1 est racine évidente.

   $3X^3 - X^2 - X - 1 = (X-1)(3X^2 + 2X + 1)$

   χ_A est scindé à racines simples et A est diagonalisable.

   Les valeurs propres de A sont 1 et $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$ de module $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$.

   $\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$ notée D.

   $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

   $P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

   La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Donc la suite (U_n) puis la suite (u_n) convergent.

2. Cf l'énoncé.

3. Soit z une racine de Q_p.

   Supposons $|z| > 1$.

   $1 < |z| < |z|^2 = |z^2| < \cdots < |z^{p-1}| < |z^p|$ donc :

$|pz^p| = |1 + \cdots + z^{p-1}| \leq 1 + |z| + \cdots + |z^{p-1}| \leq p\,|z|^{p-1} < p\,|z|^p$
On aboutit à une contradiction.
Supposons $|z| = 1$.
$p = |pz^p| = |1 + \cdots + z^{p-1}| \leq 1 + |z| + \cdots + |z^{p-1}| = p$
Il y a inégalité dans l'inégalité triangulaire donc $1, z, \ldots, z^p$ sont $\mathbb{R}_+$ colinéaires. En particulier z et 1 sont $\mathbb{R}_+$ colinéaires donc $z \in \mathbb{R}_+$.
Comme z est de module 1, $z = 1$.

4. On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1/p & & 1/p & 1/p \end{pmatrix}$.
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_p - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ -1/p & & -1/p & \lambda - 1/p \end{vmatrix}$
   On fait $C_1 \to C_1 + XC_2 + \cdots + X^{p-1}C_p$
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ Q_p(\lambda)/p & & -1/p & \lambda - 1/p \end{vmatrix} = \dfrac{(-1)^{p+1}Q_p(\lambda)}{p} \begin{vmatrix} -1 & 0 & & \\ \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{vmatrix}$
   On en déduit :
   $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^{p+1}Q_p(X)}{p}(-1)^{p-1} = \dfrac{1}{p}Q_p(X)$
   Il suffit alors de montrer que Q_p est scindé à racines simples pour conclure.

$$\begin{aligned} Q_p &= pX^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k = pX^p - \frac{X^p - 1}{X - 1} \\ (X-1)Q_p &= pX^{p+1} - pX^p - X^p + 1 = pX^{p+1} - (p+1)X^p + 1 \text{ noté } R_p \\ R_p'(X) &= p(p+1)(X^p - X^{p-1}) = p(p+1)X^{p-1}(X-1) \end{aligned}$$

   1 est racine double de R_p donc racine simple de Q_p.
   0 n'étant pas racine de R_p, les autres racines de R_p sont simples.
   Q_p est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
   χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
   $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, z_2, \ldots, z_p)$ notée D
   $\forall i \in [\![2; p]\!]\ |z_i| < 1$
   $\forall n \in \mathbb{N}\ A^n = P\mathrm{Diag}(1, z_2^n, \ldots, z_p^n)P^{-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)P^{-1}$
   La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   Donc la suite (U_n) puis la suite (u_n) convergent.