ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 3

941

1 Matrices : révisions de première année

Exercice 1 *(CCP 2022)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M^T = I_n$.
Montrer que $M^4 - 2M^2 - M = 0$.

Exercice 2 *(Banque CCP MP)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 3 *(Mines 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que AB est idempotente. (C'est à dire $(AB)^2 = AB$)
2. Déterminer $\mathrm{rg}\, A$ et $\mathrm{rg}\, B$.
3. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soient M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair telles que $MN = 0$ et $M + M^T$ est inversible.
Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Exercice 5 *(Mines 2022)*

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que :
$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\ f(AB) = f(A)f(B)$
Montrer :
$f(M) = 0 \Longleftrightarrow M$ n'est pas inversible.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. Montrer :
   $\dim(F) = n - 1 \Longleftrightarrow \exists \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $F = \ker(\phi)$
   F s'appelle un hyperplan.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

2 Matrices par blocs

Exercice 7 *(X 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ tq $A^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = 2n$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 *(Mines 2022)*

Soit $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tq $K_r^l = K_0$.

3 Trace

Exercice 9 *(Mines 2022)*

Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M + \mathrm{tr}\,(M) I_n \end{cases}$.

1. Montrer par trois méthodes différentes que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit N l'antécédent de M par f.
   Exprimer N en fonction de M uniquement.

Exercice 10 *(Centrale maths 1 2022)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer :
   H hyperplan $\Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tq $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\mathrm{tr}\,(AM) = 0\}$
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
   $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ \varphi(MN) = \varphi(NM)$
   Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{tr}\,)$.

4 Matrices semblables

Exercice 11 *(Mines 2011)*

Soient $n \geq 4$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $rg(A) = rg(B) = 2$ et $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A et B sont semblables.

5 Déterminants

Exercice 12 *(Mines 2023)*

Rang et déterminant de $\begin{pmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 *(Mines 2021)*

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Calculer le déterminant D_n de la matrice $\left(F_{|i-j|}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 14 *(Mines 2022)*

Calculer $\begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

Exercice 15 *(Centrale 2022)*

Pour $a = (a_0, \dots, a_n)$ et $b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que pour tout $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$ $a_i + b_j \neq 0$, on définit la matrice $\mathcal{C}(a, b) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ par :
$\forall (i, j) \in [\![0; n]\!]^2$ $(\mathcal{C}(a, b))_{i+1,j+1} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$

1. Montrer que si il existe $(k, l) \in [\![0; n]\!]^2$ tel que $k \neq l$ et $a_k = a_l$ alors $\det(\mathcal{C}(a, b)) = 0$.
2. Montrer que si il existe $(k, l) \in [\![0; n]\!]^2$ tel que $k \neq l$ et $b_k = b_l$ alors $\det(\mathcal{C}(a, b)) = 0$.
3. Calculer $\det(\mathcal{C}(a, b))$ lorsque $n = 1$.
4. Donner le déterminant de la matrice $V(a) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par :
   $\forall (i, j) \in [\![0; n]\!]^2$ $(V(a))_{i+1,j+1} = a_i^j$
5. On suppose que :
   $i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$.
   (a) Montrer que $\Phi \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1} \\ P \mapsto (P(b_0), \dots, P(b_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
   Si on munit $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ de leurs bases canoniques, quelle est la matrice, notée A, de Φ ?

(b) Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(X+a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_j-a_i)}$.

Montrer que $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

(c) Si on munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la base $(L_0,\dots,L_n)$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ de sa base canonique, la matrice de Φ est notée B.
Quelle relation y a-t-il entre A et B ?

(d) Déterminer $\det(\mathcal{C}(a,b))$.

6 Polynôme caractéristique

Exercice 16 *(X 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$.
Montrer que la trace et le déterminant de A sont des entiers divisibles par 3.

Exercice 17 *(Mines 2023)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre p.

1. Montrer que $p \leq n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 18 *(X 2015, 2016)*

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
On pose $B = CL$.
Montrer :
$A + B$ inversible $\iff LA^{-1}C \neq -1$

Exercice 19 *(CCP 2019)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors 0 est valeur propre de $v \circ u$.
2. Dans les questions 2 et 3, on suppose que u et v sont bijectives.
   (a) Exprimer $\det(\alpha v - v \circ u \circ v)$ en fonction de $\chi_{u\circ v}(\alpha)$ et de $\det(v)$, puis en fonction de $\chi_{v\circ u}(\alpha)$ et de $\det(v)$.
   En déduire $\chi_{u\circ v} = \chi_{v\circ u}$.
   (b) Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.
3. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$ et de $v \circ u$.
   Soit E_λ le sous-espace propre de $u \circ v$ associé à λ.
   Soit E'_λ le sous-espace propre de $v \circ u$ associé à λ.

(a) Montrer que $v(E_\lambda) \subset E'_\lambda$.
On montrerait de même que $u(E'_\lambda) \subset E_\lambda$.

(b) Montrer que $\dim(E_\lambda) = \dim(E'_\lambda)$.

(c) Montrer que si $u \circ v$ est diagonalisable alors $v \circ u$ est diagonalisable.

4. On suppose $\beta id_E - u \circ v$ bijective. On note w sa bijection réciproque.
Montrer que $(\beta id_E - v \circ u)(Id_E + v \circ w \circ u) = \beta id_E$.
En déduire $\beta id_E - v \circ u$ bijective.
5. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 20 *(Mines 2021)*

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme non nul, on appelle valuation de P, et on note $\mathrm{Val}(P)$ le plus petit entier k tel que a_k est non nul.
Par convention, la valuation du polynôme nul est $+\infty$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
Soit P le polynôme tel que :
$\forall t \in \mathbb{C}\ P(t) = \det(tA + B)$
Montrer que le rang de A est supérieur ou égal au degré de P et que le rang de B est supérieur ou égal à $n - \mathrm{Val}(P)$.

7 Matrices diagonalisables

Exercice 21 *(Mines 2019)*

Etude de la diagonalisation de $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Exercice 22 *(Mines 2021)*

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. CNS pour que M soit diagonalisable.
2. Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calcul de M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23 *(Centrale 2015, maths 1)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{n} & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n}{n} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Indication fournie par l'examinateur (mais quand ?)
On pourra penser à exprimer l'endomorphisme associé à la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Remarque
Cet exercice est tombé, sans indication, aux Mines en 2022.

Exercice 24 *(Mines 2001)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & e & f & g \\ 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j \end{pmatrix}$. Montrer que :
A diagonalisable $\iff$ A possède 4 valeurs propres distinctes.

Exercice 25 *(D'après X 2011)*

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ m_{i,j} = a^{i-j}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 26 *(X 2020)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Indication (donnée à quel moment ?)
Cas $n = 1$, puis généralisation.

Cet exercice peut être généralisé :

Exercice 27 *(X 2020)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On définit $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$

1. Montrer que si A et B sont inversibles alors $A \otimes B$ est inversible.
2. Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $A \otimes B$ est diagonalisable.

8 Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 28 *(Mines 2011)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$. On suppose que 1 et -1 sont des valeurs propres de A.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 29 *(Mines 2012)*

Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}\,(M) = n$.