ALGEBRE LINEAIRE
TD
2025-2026
Chapitre 3

941

1 Matrices : révisions de première année

Exercice 1 *(CCP 2022)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 - M^T = I_n$.
Montrer que $M^4 - 2M^2 - M = 0$.

Correction
$M^2 - M^T = I_n$
On transpose : $(M^2)^T - M = I_n$
Mais $(M^2)^T = (M^T)^2 = (M^2 - I_n)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$ donc :
$M^4 - 2M^2 + I_n - M = I_n$ et $M^4 - 2M^2 - M = 0$

Exercice 2 *(Banque CCP MP)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$?

Correction

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

   Alors $M \in \text{Ker} f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$.

   C'est-à-dire, $M \in \text{Ker} f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.

   On en déduit que $\text{Ker} f = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)

On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\mathrm{Ker} f$.
De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.
Donc (M_1, M_2) est une base de $\mathrm{Ker} f$.

2. $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
   Comme $\mathrm{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. (1)
   Prouvons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

   Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a & = & c \\ -2b & = & 2d \\ a & = & 2c \\ b & = & 4d \end{cases}$.
   On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
   Donc $M = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (2)
   Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Exercice 3 *(Mines 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que AB est idempotente. (C'est à dire $(AB)^2 = AB$)
2. Déterminer $\mathrm{rg}\, A$ et $\mathrm{rg}\, B$.
3. Montrer que $BA = I_2$.

Correction

1. On vérifie facilement que $(AB)^2 = AB$.
2. La somme des trois lignes de AB est nulle et ses deux premières lignes ne sont pas colinéaires.
   Donc $\mathrm{rg}(AB) = 2$.
   Or $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$ et le rang d'une matrice est inférieur à son nombre de lignes ou de colonnes donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.

3. $(AB)^2 = (AB)$ donc $A(BA - I_2)B = 0$
   Le rang de A est égal au nombre de ses colonnes donc elle est injective et $(BA - I_2)B = 0$.
   Le rang de B est égal au nombre de ses lignes donc elle est surjective, $BA - I_2$ est nulle sur $\mathbb{R}^2$ et $BA = I_2$.

Exercice 4 *(Mines 2023)*

Soient M et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n impair telles que $MN = 0$ et $M + M^T$ est inversible.
Montrer que $N + N^T$ n'est pas inversible.

Correction
$M + M^T$ est inversible donc $n = \text{rg}\left(M + M^T\right)$.
$\forall X \in \mathbb{R}^n$ $\left(M + M^T\right) X = MX + M^T X \in \text{Im}\,(M) + \text{Im}\left(M^T\right)$
Donc $\text{Im}\left(M + M^T\right) \subset \text{Im}\,(M) + \text{Im}\left(M^T\right)$ et en prenant les dimensions :
$n = \text{rg}\left(M + M^T\right) \leq \text{rg}(M) + \text{rg}\left(M^T\right) - \dim\left(\text{Im}\,(M) \cap \text{Im}\left(M^T\right)\right) \leq \text{rg}(M) + \text{rg}\left(M^T\right) = 2\,\text{rg}(M)$
En d'autres termes : $\text{rg}(M) \geq \dfrac{n}{2}$.
Mais $MN = 0$ donc $\text{Im}\,(N) \subset \text{Ker}\,(M)$ et en prenant les dimensions :
$\text{rg}(N) \leq \dim\left(\text{Ker}\,(M)\right) = n - \text{rg}(M) \leq n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{n}{2}$
Mais n est impair donc $\dfrac{n}{2}$ n'est pas entier.
On en déduit $\text{rg}(N) < \dfrac{n}{2}$.
On a alors $\text{rg}\left(N + N^T\right) \leq \text{rg}(N) + \text{rg}\left(N^T\right) = 2\,\text{rg}(N) < n$ et $N + N^T$ n'est pas inversible.

Exercice 5 *(Mines 2022)*

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que :
$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ $f(AB) = f(A)f(B)$
Montrer :
$f(M) = 0 \Longleftrightarrow M$ n'est pas inversible.

Correction
Soit M une matrice inversible.
$MM^{-1} = I_n$ donc $f(M)f(M^{-1}) = f(I_n)$.
Mais :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n)$
f n'est pas constante donc il existe $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A_0) \neq 0$
$f(A_0) = f(A_0)f(I_n)$ donne alors $f(I_n) = 1$
On a donc $f(M)f(M^{-1}) = 1$.
On en déduit que $f(M) \neq 0$.

Soit M une matrice qui n'est pas inversible.
Il existe une matrice N non nulle telle que $MN = 0$.
On en déduit $f(M)f(N) = f(0)$.
Mais :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $f(0) = f(0A) = f(0)f(A)$

f n'est pas constante donc il existe $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A_0) \neq 1$
$f(0) = f(0)f(A_0)$ donne alors $f(0) = 0$
On a donc $f(M)f(N) = 0$ donc $f(M)$ ou $f(N)$ (en fait les deux) est nul.
Comment s'assurer que $f(M) = 0$?
Si $M = 0$, c'est fait donc on suppose désormais M non inversible et non nulle.
Il n'est pas possible d'avoir $MN = 0$ avec N inversible et M non nulle.
Par contre, on peut avoir pour certaines matrices $MNM = 0$ avec N inversible.
On va adapter cette idée.
Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,(M)$ (il en existe dès que M est non nulle).
Mx est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ donc (Mx) est une famille libre qu'on peut compléter en une base de $\mathbb{R}^n$: $(Mx, v_2, \dots, v_n)$
Soit y un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(M)$: il en existe dès que M n'est pas inversible.
y est un vecteur non nul donc (y) est une famille libre qu'on peut compléter en une base de $\mathbb{R}^n$: $(y, w_2, \dots, w_n)$
Il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(Mx) = y$ et pour tout i compris entre 2 et n, $f(v_i) = w_i$.
f transforme une base de $\mathbb{R}^n$ en base de $\mathbb{R}^n$ donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Soit N la matrice dans la base canonique de f.
$\mathrm{Ker}\,(M) \subset \mathrm{Ker}\,(MNM)$ et en plus $x \in \mathrm{Ker}\,(MNM)$ donc le rang de MNM est strictement inférieur à celui de M.
Si MNM est non nulle, il existera N_2 inversible telle que $MNMN_2MNM$ soit de rang strictement inférieur à celui de MNM.
On montre ainsi qu'il existe des matrices inversibles $A_1, \dots, A_p$ telles que $MA_1MA_2 \dots MA_pM$ est nulle.
On a alors $f(M)^{p+1}f(A_1)\dots f(A_p) = 0$ avec $f(A_1), \dots, f(A_p)$ non nuls.
D'où $f(M) = 0$.

Exercice 6 *(Mines 2023)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace de E.

1. Montrer :
   $\dim(F) = n - 1 \iff \exists \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $F = \ker(\phi)$
   F s'appelle un hyperplan.
2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

Correction

1. - On suppose que F est de dimension $n - 1$.
     Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de F.
     C'est une famille libre de E donc on peut la compléter en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E.
     Soit $\phi \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_n \end{cases}$.
     ϕ est une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{R}$ et son noyau est F.
   - Soit ϕ une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{R}$ et F son noyau.
     $\mathrm{Im}\,(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est de dimension 1 donc le rang de ϕ vaut 0 ou 1. Mais ϕ est non nulle donc son rang est égal à 1.
     Par la formule du rang, F est de dimension $n - 1$.

2. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Il existe $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tq $H = \ker(\phi)$
On note $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \phi(M) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\phi\left(E_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}a_{i,j} \text{ en posant } a_{i,j} = \phi(E_{i,j})\end{aligned}$$

En particulier on a pour $k \neq l$, $I_n + tE_{k,l}$ qui est inversible (c'est une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux valent 1) et :
$\phi\left(I_n + tE_{k,l}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + ta_{k,l}$
Donc si il existe k et l distincts tels que $a_{k,l} \neq 0$, l'hyperplan H contient une matrice de la forme $I_n + tE_{k,l}$ donc contient une matrice inversible.
Si $a_{k,l} = 0$ pour tous k et l distincts alors H contient toute matrice de diagonale nulle. Il suffit d'exhiber une matrice inversible de diagonale nulle.
La matrice $\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + E_{1,n}$ convient.

2 Matrices par blocs

Exercice 7 *(X 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ tq $A^3 = 0$ et $\text{rg}(A) = 2n$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction
La formule du rang donne $\dim(\text{Ker}\,(A)) = n$.
La formule du rang donne également : $\text{rg}(A^2) = \text{rg}(A) - \dim(\text{Ker}\,(A) \cap \text{Im}\,(A))$.
Or $\dim(\text{Ker}\,(A) \cap \text{Im}\,(A)) \leq \dim(\text{Ker}\,(A)) = n$ donc $\text{rg}(A^2) \geq 2n - n = n$.
$A^3 = 0$ donc $\text{Im}\,(A^2) \subset \text{Ker}\,(A)$.
On a donc avec les dimensions : $\text{Ker}\,(A) = \text{Im}\,(A^2)$.
On part de $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\text{Ker}\,(A)$.
Il existe $e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}$ tels que :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ e_i = A^2 e_{2n+i}$
Enfin pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $e_{n+i} = Ae_{2n+i}$.
On montre ensuite la liberté de $(e_1, \ldots, e_{3n})$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{3n}) \in \mathbb{R}^{3n}$ tq $\sum_{i=0}^{3n} \lambda_i e_i = 0$
On multiplie, à gauche, par A^2, il reste :
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{2n+i} e_i = 0$

$(e_1, \dots, e_n)$ étant libre :
$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\lambda_{2n+i} = 0$
Il reste donc $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i e_i = 0$
On multiplie, à gauche, par A, il reste :
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i} e_i = 0$
$(e_1, \dots, e_n)$ étant libre :
$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\lambda_{n+i} = 0$
Il reste donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$
$(e_1, \dots, e_n)$ étant libre :
$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $\lambda_i = 0$
$(e_1, \dots, e_{3n})$ est donc une base et elle permet de répondre à la question.

Exercice 8 *(Mines 2022)*

Soit $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tq $K_r^l = K_0$.

Correction
On suppose $r < n$ (si $r > n$ K_r n'est pas définie : I_r a trop de colonnes, si $r = n$, $K_r = I_n$ n'est pas nilpotente).
$K_r = \begin{pmatrix} A & I_r \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(R)$ donc la produit par blocs $\begin{pmatrix} A & I_r \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & I_r \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + I_r B & AI_r + I_r C \\ BA + CB & BI_r + C^2 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens : A^2 n'est pas défini.
Si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors :
$K_r e_1 = \cdots = K_r e_{n-r} = 0$
$K_r e_{n-r+1} = e_1$ et $K_r^2 e_{n-r+1} = 0$
$K_r e_{n-r+2} = e_{n-r+1}$ et $K_r^3 e_{n-r+2} = 0$
Une récurrence finie permet de prouver :
$\forall k \in [\![1;r]\!]$ $K_r^{k+1} e_{n-r+k} = 0$
Cette propriété est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$.
On la suppose vraie pour $k \leq r - 1$.
$K_r^{k+2} e_{n-r+k+1} = K_r^{k+1} (K_r e_{n-r+k+1}) = K_r^{k+1} e_{n-r+k} = 0$
On a donc $K_r^{r+1} = 0$.
On peut aussi remarquer :
$\forall k \in [\![1, r]\!]$ $K_r^k = K_{r+1-k}$

Remarque
Dans l'état actuel du programme, on peut aller plus vite.
K_r est une matrice strictement triangulaire supérieure donc son polynôme caractéristique est X^n (il s'agit d'un déterminant triangulaire supérieur).
Avec le théorème de Cayley-Hamilton, $K_r^n = 0$.

3 Trace

Exercice 9 *(Mines 2022)*

Soit $f\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ M \mapsto M + \mathrm{tr}\,(M)I_n\end{cases}$.

1. Montrer par trois méthodes différentes que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit N l'antécédent de M par f.
   Exprimer N en fonction de M uniquement.

Correction

1. La linéarité de f est claire.
   - **Première méthode**
     f étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il suffit de montrer que son noyau est réduit à la matrice nulle.
     Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
     $M = -\mathrm{tr}\,(M)I_n$
     On prend la trace : $\mathrm{tr}\,(M) = -n\mathrm{tr}\,(M)$ donc $\mathrm{tr}\,(M) = 0$ car $n \neq -1$.
     Mais alors $M = -\mathrm{tr}\,(M)I_n = 0$.
   - **Deuxième méthode**
     $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}I_n \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{tr}\,)$.
     Dans une base adaptée, la matrice de f est $\begin{pmatrix} n+1 & 0\\ 0 & I_{n^2-1}\end{pmatrix}$ de déterminant $n+1 \neq 0$.
   - **Troisième méthode**
     On revient à la définition d'une bijection :
     $\forall m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \exists! N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $f(N) = M$.
     On procède par analyse synthèse :
     On suppose $f(N) = N + \mathrm{tr}\,(N)I_n = M$.
     On prend la trace $(n+1)\mathrm{tr}\,(N) = \mathrm{tr}\,(M)$.
     D'où $N = M - \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}I_n$.
     D'où l'unicité en cas d'existence.
     Réciproquement, on pose $N = M - \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}I_n$.
     $\mathrm{tr}\,(N) = \mathrm{tr}\,(M) - \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}n = \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}$.
     D'où $f(N) = N + \mathrm{tr}\,(N)I_n = M - \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}I_n + \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}I_n = M$.
   - **Quatrième méthode**
     Soit $g = f - id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ M \mapsto \mathrm{tr}\,(M)I_n\end{cases}$
     $\forall M \in \mathcal{M}_n(C)\ g^2(M) = g(g(M)) = g\left(\mathrm{tr}\,(M)I_n\right) = \mathrm{tr}\,(M)g(I_n) = n\mathrm{tr}\,(M)I_n = ng(M)$
     Donc $g^2 = ng$ ie $(f - id)^2 = n(f - id)$.
     On en déduit $f^2 - 2f + id_E = nf - nid_E$ ou encore $f^2 - (n+2)f = -(n+1)id_E$
     On en déduit : $f\left(\dfrac{n+2}{n+1}id - \dfrac{1}{n+1}f\right) = \left(\dfrac{n+2}{n+1}id - \dfrac{1}{n+1}f\right)f = id$ donc f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $f^{-1} = \dfrac{n+2}{n+1}id - \dfrac{1}{n+1}f\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ M \mapsto M - \dfrac{\mathrm{tr}\,(M)}{n+1}I_n.\end{cases}$

2. Cf la troisième méthode dans la question précédente.

Exercice 10 *(Centrale maths 1 2022)*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer :
   H hyperplan $\Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tq $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \mathrm{tr}\,(AM) = 0\}$
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
   $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ \varphi(MN) = \varphi(NM)$
   Montrer que $\varphi \in \mathrm{Vect}(\mathrm{tr}\,)$.

Correction

1. - On suppose : $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tq $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \mathrm{tr}\,(AM) = 0\}$
     Soit $\varphi_A \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ M \mapsto \mathrm{tr}\,(AM) \end{cases}$.
     φ_A est linéaire :
     $$\begin{aligned} \forall (M_1,M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ \forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{K}^2\ \varphi_A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= \mathrm{tr}\,(A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)) \\ &= \mathrm{tr}\,(\lambda_1 AM_1 + \lambda_2 AM_2) \\ &= \lambda_1 \mathrm{tr}\,(AM_1) + \lambda_2 \mathrm{tr}\,(AM_2) \\ &= \lambda_1 \varphi_A(M_1) + \lambda_2 \varphi_A(M_2) \end{aligned}$$
     φ_A est non nulle :
     $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \varphi_A(M) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} m_{l,k}$
     En particulier :
     $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ a_{i,j} = \varphi_A(E_{j,i})$
     A n'étant pas nulle, un de ses coefficients est non nul et il existe $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $\varphi_A(E_{i,j}) \neq 0$
   - On suppose que H est un hyperplan.
     H a une équation dans la base canonique :
     il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ famille de n^2 scalaires telle que :
     $M \in H \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} m_{i,j} = 0$
     Si on pose $A = (\alpha_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \mathrm{tr}\,(AM) = 0\}$
2. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.
   Si $i \neq j$ alors $E_{i,i}E_{i,j} = E_{i,j}$ et $Ei,jE_{i,i} = 0$ donc $\varphi(E_{i,j}) = 0$
   $E_{i,1}E_{1,i} = E_{i,i}$ et $E_{1,i}E_{i,1} = E_{1,1}$ donc $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{1,1})$
   φ et $\varphi(E_{1,1})\mathrm{tr}$ coïncident sur la base canonique donc sont égales.

4 Matrices semblables

Exercice 11 *(Mines 2011)*

Soient $n \geq 4$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $rg(A) = rg(B) = 2$ et $A^2 = B^2 = 0$.
Montrer que A et B sont semblables.

Correction
$A^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$
Soit (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.
$\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$ donc c'est une famille libre de $\mathrm{Ker}\,(A)$.
On la complète en $(e_1, e_2, \dots, e_{n-2})$ une base de $\ker(A)$ (on tient compte de la formule du rang pour le nombre de vecteurs).
Il existe e_{n-1} et $e_n \in \mathbb{R}^n$ tq $Ae_{n-1} = e_1$ et $Ae_n = e_2$.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.
On multiplie par A (à gauche) : $\lambda_{n-1}e_1 + \lambda_n e_n = 0$.
On en déduit : $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$.
Il reste : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i e_i = 0$.
On en déduit : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$
$(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à (e_1, e_2, e_n) alors :

$$A = PMP^{-1} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

B ayant les mêmes propriétés que A est elle aussi semblable à M.
Donc A et B sont semblables.

5 Déterminants

Exercice 12 *(Mines 2023)*

Rang et déterminant de $\begin{pmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

Correction

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} &= (m-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & m-1 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m-1 \end{vmatrix} + (m+1)\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (m-1)(-m-2) - m(m^2-2m) + (m+1)(3m-2) \\ &= -m^2 - m + 2 - m^3 + 2m^2 + 3m^2 + m - 2 \\ &= -m^3 + 4m^2 = -m^2(m-4) \end{aligned}$$

Donc si $m \neq 0, 4$ alors M est de rang 3.
Pour $m = 0$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les deux premières colonnes sont clairement linéairement indépendantes donc le rang de M est supérieur ou égal à 2. Comme le déterminant de M est nul, il est aussi inférieur ou égal à 2. Si $m = 0$, le rang de M vaut 2.

Pour $m = 4$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et les mêmes arguments que pour $m = 0$ montre que le rang de cette matrice vaut 2.

Exercice 13 *(Mines 2021)*

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
Calculer le déterminant D_n de la matrice $\left(F_{|i-j|}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Correction
Soit $n \geq 3$.
On fait $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} - L_{n-2}$.
Le coefficient situé sur la dernière ligne et dans la j-ième colonne devient :
$F_{|n-j|} - F_{|n-1-j|} - F_{|n-2-j|}$
Si $j \leq n-2$ cela donne :
$F_{n-j} - F_{n-1-j} - F_{n-2-j} = 0$
Si $j = n-1$ cela donne :
$F_1 - F_0 - F_1 = 0$
Si $j = n$ cela donne :
$F_0 - F_1 - F_2 = -2$
On développe alors par rapport à la dernière ligne et on obtient $D_n = -2D_{n-1}$, pour $n \geq 3$.
$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ donc :
$\forall n \geq 2\ D_n = (-1)^{n-1}2^{n-2}$
Par ailleurs, $D_1 = 0$.

Exercice 14 *(Centrale 2022)*

Soient $A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n,0} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Donner une CNS portant sur A pour que l'équation $AX = B$, d'inconnue X, ait une et une seule solution.
   (b) On suppose cette condition vérifiée et on suppose $AX = B$.
   Montrez que $x_0 = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_0 & a_{0,1} & \dots & \dots & a_{0,n} \\ b_1 & a_{1,1} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ b_n & a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.
   Trouvez une expression similaire pour $x_1, \dots, x_n$.
2. On suppose que $(X-1)^n P(X) = a_0 X^{b_0} + a_1 X^{b_1} + \dots + a_n X_n^b$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$, $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts avec $a_0 = 1$, $b_0, \dots, b_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts avec $b_0 = 0$.
   (a) Montrer :
   $\forall p \in [\![0; n-1]\!]\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_k^p = 0$

(b) Deux autres questions.

Correction

1. (a) Supposons que l'équation $AX = B$, d'inconnue X, ait une et une seule solution, notons la X_0.
   Soit $Y \in \operatorname{Ker}(A)$.
   $A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B$ donc $X_0 + Y$ est solution de l'équation $AX = B$.
   On en déduit $X_0 + Y = X_0$.
   Donc $Y = 0$.
   A est une matrice carrée dont le noyau est réduit à $\{0\}$ donc A est inversible.
   La réciproque est vraie :
   Si A est inversible alors $A^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation $AX = B$.
2. On note $C_0, \dots, C_n$ les colonnes de A.
   $AX = B$ donc $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k C_k$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b_0 & a_{0,1} & \dots & \dots & a_{0,n} \\ b_1 & a_{1,1} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ b_n & a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} &= \det_{Can}(B, C_1, \dots, C_n) = \det_{Can}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k C_k, C_1, \dots, C_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k \det_{Can}(C_k, C_1, \dots, C_n) \\
&= x_0 \det_{Can}(C_0, C_1, \dots, C_n) \\
&= x_0 \det(A)
\end{aligned}$$

Comme A est supposée inversible, on obtient bien $x_0 = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_0 & a_{0,1} & \dots & \dots & a_{0,n} \\ b_1 & a_{1,1} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ b_n & a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

On a de même :

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \; x_i = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,i-1} & b_0 & a_{0,i+1} & \dots & \dots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

3. (a) 1 est racine de multiplicité au moins n du polynôme $Q(X) = (X-1)^n P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{b_k}$.
   On en déduit :
   $\forall p \in [\![0; n-1]\!] \; Q^{(p)}(1) = 0$
   Mais :
   $\forall p \in [\![0; n-1]\!] \; Q^{(p)}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k (b_k - 1) \dots (b_k - p + 1) X^{b_k - p}$
   Cette égalité est valable même si certains exposants sont négatifs : le coefficient qui les précède est nul et on voit l'égalité comme une égalité entre fractions rationnelles.
   On obtient :
   $\forall p \in [\![0; n-1]\!] \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k (b_k - 1) \dots (b_k - p + 1) = 0$

On considère $\Phi \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R} \\ R \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k R(b_k) \end{cases}$.

Φ est linéaire et on vient de montrer :

$\forall p \in [\![0;n-1]\!]\ \Phi(X(X-1)\dots(X-p+1)) = 0$

Les polynômes $1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-p+1)$ sont échelonnés en degré donc ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Il y en a $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc ils forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On en déduit que Φ est l'application linéaire nulle.

Donc :

$\forall p \in [\![0;n-1]\!]\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k^p = \Phi(X^p) = 0$

Exercice 15 *(Mines 2022)*

Calculer $\begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

Correction

- **Première méthode**

  On fixe $x_1, \dots, x_{n-1}$ deux à deux distincts non nuls et différents de 1.

  On note $x_0 = 0$ et $x_{-1} = 1$.

  Soit $f : x \mapsto \begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+x & \dots & 1+x^n \end{vmatrix}$.

  En développant par rapport à la dernière ligne, on montre que f est polynomiale de degré au plus n.

  D'après le cours sur l'interpolation de Lagrange :

  $$\forall x \in \mathbb{K}\ f(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} f(x_i) \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=-1 \\ j\neq i}}^{n-1} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=-1 \\ j\neq i}}^{n-1} (x_i - x_j)}$$

  Mais :

$\forall i \in [\![1; n-1]\!]$] $f(x_i) = 0$: 2 lignes sont égales.

$$\begin{aligned}
f(0) &= \begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+x_{n-1} & \dots & 1+x_{n-1}^n \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \text{ en retranchant la dernière ligne à toutes les autres} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \, VdM(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} x_i \times \prod_{i=1}^{n-1} (1-x_i) \times \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+x_{n-1} & \dots & 1+x_{n-1}^n \\ 2 & \dots & 2 \end{vmatrix} = 2f(0)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{K} \; f(x) &= f(0) \left(\frac{(x-1)\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)}{(-1)^n \prod_{i=1}^{n-1} x_i} + 2 \frac{x \prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)} \right) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i) \left(-\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - 1) + 2x \prod_{i=1}^{n-1} x_i \right)
\end{aligned}$$

Le déterminant cherché est alors :

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \left(2 \prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1) \right)$$

La formule est valable dans le cas général par continuité.

- **Deuxième méthode**

  On note Δ le déterminant de l'énoncé.

  On note U la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout i compris entre 1 et n, A_i la colonne $\begin{pmatrix} x_1^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{pmatrix}$.

  En développant Δ par n-linéarité, on obtient la somme de 2^n déterminants. Ceux où

apparaît deux fois U sont nuls et il reste :
$\Delta = \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_{i-1},U,A_{i+1},\dots,A_n)$
En échangeant $i-1$ fois U avec la colonne située à sa gauche, on obtient :
$\Delta = \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \det_{\mathrm{Can}}(U,A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n)$
On considère ensuite le déterminant :

$$VdM(x_1,\dots,x_n,1) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

En le développant par rapport à sa dernière ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} VdM(x_1,\dots,x_n,1) &= (-1)^n \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i} \det_{\mathrm{Can}}(U,A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n) \\ &= (-1)^n \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \det_{\mathrm{Can}}(U,A_1,\dots,A_{i-1},A_{i+1},\dots,A_n) \\ &= (-1)^n \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) + (-1)^{n-1}\left(\Delta - \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n)\right) \\ &= 2(-1)^n \det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) - (-1)^n\Delta \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\det_{\mathrm{Can}}(A_1,\dots,A_n) - (-1)^n VdM(x_1,\dots,x_n,1) \\ &= 2VdM(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n} x_i - (-1)^n VdM(x_1,\dots,x_n,1) \\ &= 2\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n} x_k - (-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \\ &= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\left(2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right) \end{aligned}$$

Exercice 16 *(Centrale 2022)*

Pour $a=(a_0,\dots,a_n)$ et $b=(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ tels que pour tout $(i,j)\in[\![0;n]\!]^2$ $a_i+b_j\neq 0$, on définit la matrice $\mathcal{C}(a,b)\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ par :
$\forall (i,j)\in[\![0;n]\!]^2\ \ (\mathcal{C}(a,b))_{i+1,j+1} = \dfrac{1}{a_i+b_j}$

1. Montrer que si il existe $(k,l)\in[\![0;n]\!]^2$ tel que $k\neq l$ et $a_k=a_l$ alors $\det(\mathcal{C}(a,b))=0$.
2. Montrer que si il existe $(k,l)\in[\![0;n]\!]^2$ tel que $k\neq l$ et $b_k=b_l$ alors $\det(\mathcal{C}(a,b))=0$.
3. Calculer $\det(\mathcal{C}(a,b))$ lorsque $n=1$.
4. Donner le déterminant de la matrice $V(a)\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par :
   $\forall (i,j)\in[\![0;n]\!]^2\ \ (V(a))_{i+1,j+1} = a_i^j$
5. On suppose que :
   $i\neq j \Longrightarrow a_i\neq a_j$ et $b_i\neq b_j$.

(a) Montrer que $\Phi \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}^{n+1} \\ P \mapsto (P(b_0), \ldots, P(b_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
Si on munit $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ de leurs bases canoniques, quelle est la matrice, notée A, de Φ ?

(b) Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, soit $L_i = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X + a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_j - a_i)}$.
Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

(c) Si on munit $\mathbb{C}_n[X]$ de la base $(L_0, \ldots, L_n)$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ de sa base canonique, la matrice de Φ est notée B.
Quelle relation y a-t-il entre A et B ?

(d) Déterminer $\det(\mathcal{C}(a, b))$.

Correction

1. $\forall j \in [\![0; n]\!]\ \ (\mathcal{C}(a, b))_{k+1,j+1} = \dfrac{1}{a_k + b_j} = \dfrac{1}{a_l + b_j} = (\mathcal{C}(a, b))_{l+1,j+1}$
La matrice $\mathcal{C}(a, b)$ ayant deux lignes égales, son déterminant est nul.
2. $\forall i \in [\![0; n]\!]\ \ (\mathcal{C}(a, b))_{i+1,k+1} = \dfrac{1}{a_i + b_k} = \dfrac{1}{a_i + b_l} = (\mathcal{C}(a, b))_{i+1,l+1}$
La matrice $\mathcal{C}(a, b)$ ayant deux colonnes égales, son déterminant est nul.
3.

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{C}(a, b)) &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_0 + b_0} & \dfrac{1}{a_0 + b_1} \\ \dfrac{1}{a_1 + b_0} & \dfrac{1}{a_1 + b_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)} - \frac{1}{(a_0 + b_1)(a_1 + b_0)} \\
&= \frac{a_0a_1 + a_0b_0 + b_1a_1 + b_1b_0 - a_0a_1 - a_0b_1 - b_0a_1 - b_0b_1}{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)(a_0 + b_1)(a_1 + b_0)} \\
&= \frac{a_0b_0 + a_1b_1 - a_0b_1 - b_0a_1}{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)(a_0 + b_1)(a_1 + b_0)} \\
&= \frac{a_0(b_0 - b_1) + a_1(b_1 - b_0)}{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)(a_0 + b_1)(a_1 + b_0)} \\
&= \frac{(a_1 - a_0)(b_1 - b_0)}{(a_0 + b_0)(a_1 + b_1)(a_0 + b_1)(a_1 + b_0)}
\end{aligned}$$

4. Il s'agit d'un déterminant de Vandermonde.
$\det(V(a)) = \displaystyle\prod_{\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$
5. On vérifie facilement que Φ est linéaire.
Si $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ alors P a $n + 1$ racines deux à deux distinctes tout en étant de degré inférieur ou égal à n. P est donc le polynôme nul.
On en déduit que le noyau de Φ est réduit au polynôme nul.
Φ est donc injective. L'espace de départ et l'espace d'arrivée étant de même dimension finie, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
La matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_n[X]$ et de $\mathbb{C}^{n+1}$ est donc une matrice à

$n+1$ lignes et $n+1$ colonnes.
Le coefficient à l'intersection de la $i+1$-ème ligne et de la $j+1$-ième colonne est b_i^j. C'est donc une matrice de Vandermonde : $A = VdM(b_0, \ldots, b_n)$.

6. Cf le cours sur l'interpolation de Lagrange.

7. $\Phi = \Phi \circ id_{\mathbb{C}_n[X]}$
Donc $A = BM$ où M est la matrice de $id_{\mathbb{C}_n[X]}$ avec la base canonique au départ et la base $(L_0, \ldots, L_n)$ à l'arrivée.
On l'obtient en écrivant en colonne les coordonnées des polynômes de la base canonique dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.
La formule :
$\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \; P = \sum_{i=0}^{n} P(-a_i) L_i$
a été vue en cours.
On en déduit que $M = VdM(-a_0, \ldots, -a_n)$.

8.

$$\begin{aligned}
\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2 \; B_{i+1,j+1} &= L_j(b_i) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(b_i+a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(a_k-a_j)} \\
&= \frac{1}{b_i+a_j}\frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(b_i+a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(a_k-a_j)}
\end{aligned}$$

$\prod\limits_{k=0}^{n}(b_i+a_k)$ est indépendant de j et $\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(a_k-a_j)$ est indépendant de i donc :

$$\det(B) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(b_i+a_k)\right)}{\prod\limits_{j=0}^{n}\left(\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(a_k-a_j)\right)} \det(\mathcal{C}(a,b))$$

Mais $\det(A) = \det(B) \times \det(M)$ donc :

$$\prod_{0\le i<j\le n}(b_j-b_i) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(b_i+a_k)\right)}{(-1)^{n(n-1)/2}\prod\limits_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)^2}\det(\mathcal{C}(a,b)) \prod_{0\le i<j\le n}(-a_j+a_i)$$

On en déduit :

$$\det(\mathcal{C}(a,b)) = \prod_{0\le i<j\le n}(b_j-b_i)\frac{(-1)^{n(n-1)/2}\prod\limits_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)^2}{(-1)^{n(n-1)/2}\prod\limits_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)}\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}(b_i+a_k)\right)}$$

et après simplification :

$$\det\left(\mathcal{C}(a,b)\right) = \frac{\displaystyle\prod_{0\le i<j\le n}(b_j-b_i)\prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}\left(\prod_{k=0}^{n}(b_i+a_k)\right)}$$

Cette formule reste valable si les a_k ou les b_l ne sont pas deux à deux distincts.

6 Polynôme caractéristique

Exercice 17 *(X 2021)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$.
Montrer que la trace et le déterminant de A sont des entiers divisibles par 3.

Correction
A est annulée par le polynôme $X^3 - 3X^2 + 3X = (X-1)^3 + 1$.
Les valeurs propres complexes de A sont racines de ce polynôme.
Les racines de ce polynôme sont 0, $1-j$ et $1-j^2$.
A étant réelles les valeurs propres de A sont $1-j$ de multiplicité α, $1-j^2$ de multiplicité α et 0 de multiplicité $n-2\alpha$.
La trace de A est donc $\alpha(1-j+1-j^2) = 3\alpha$.
Le déterminant de A est $0^{n-2\alpha} \times |1-j|^{2\alpha}$.
$|1-j|^2 = (1-j)(1-j^2) = 1-j-j^2+j^3 = 3$ donc le déterminant de A vaut $0^{n-2\alpha}3^{\alpha}$.
Si $n-2\alpha > 0$, le déterminant de A est nul. C'est bien un entier divisible par 3.
Si $n-2\alpha = 0$, alors n est pair et $\det(A) = 3^{n/2}$ où $\dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}^*$. C'est bien un entier divisible par 3.

Exercice 18 *(Mines 2023)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre p.

1. Montrer que $p \le n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Correction

Exercice 19 *(Mines 2023)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'ordre p.

1. Montrer que $p \le n$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

Correction

1. $A^p = 0$ donc le polynôme X^p annule A.
   A n'a donc qu'une seule valeur propre complexe possible : 0.
   Mais χ_A est un polynôme unitaire de degré n donc par d'Alembert-Gauss, $\chi_A = X^n$.
   Par Cayley-Hamilton $A^n = 0$.
   Mais p est le plus petit entier k tel que $A^k = 0$ donc $p \leq n$.
2. $\chi_A = X^3$: c'est immédiat puisque A est triangulaire.
   Par Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$.
   Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.
   $B^6 = A^3 = 0$ donc $B^3 = 0$.
   On en déduit $B^4 = 0$.
   Mais $B^4 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non nulle : on aboutit à une contradiction.

Exercice 20 *(X 2015, 2016)*

Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
On pose $B = CL$.
Montrer :
$A + B$ inversible $\iff LA^{-1}C \neq -1$

Correction

- **Première méthode**
  Soit $X \in \operatorname{Ker}(A + B)$.
  $AX + BX = 0$.
  Mais $BX = (CL)X = C(LX)$ où LX est un nombre donc $BX = (LX)C$.
  Donc $AX = -(LX)C$ et $X = -(LX)A^{-1}C$ est colinéaire à $A^{-1}C$.
  En d'autres termes $\operatorname{Ker}(A + B) \subset \mathbb{R}A^{-1}C$.
  Réciproquement,
  $(A + B)A^{-1}C = C + (LA^{-1}C)C = \left(1 + LA^{-1}C\right) C$.
  Si $C = 0$ alors $A + B = A$ est inversible.
  Si $C \neq 0$ et $LA^{-1}C \neq -1$ alors $A^{-1}C$ n'appartient pas à $\operatorname{Ker}(A + B)$.
  On en déduit $\operatorname{Ker}(A + B) = \{0\}$ puis l'inversibilité de $A + B$.
  Si $LA^{-1}C = -1$ alors $\operatorname{Ker}(A + B) = \mathbb{R}A^{-1}C$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et $A + B$ n'est pas inversible.
- **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= \det\Big(A\left(I_n + A^{-1}B\right)\Big) = \det(A) \times \det\left(I_n + A^{-1}B\right) \\ &= (-1)^n \det(A) \times \det\left(-I_n - A^{-1}B\right) \\ &= (-1)^n \det(A) \chi_{A^{-1}B}(-1) \end{aligned}$$

  Le rang de $A^{-1}B$ est égal au rang de la matrice B.
  B est de rang 0 (si L ou $C = 0$) ou de rang 1.
  Donc 0 est valeur propre de $A^{-1}B$ et le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n - 1$.
  Donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$ de $A^{-1}B$.
  La dernière valeur propre est la trace de $A^{-1}B$.
  Donc $\chi_{A^{-1}B}(X) = X^{n-1}(X - \operatorname{tr}(A^{-1}B))$.

Donc $\det(A+B) = \det(A)(1 + \operatorname{tr}(A^{-1}B))$.
Or $\operatorname{tr}(A^{-1}B) = \operatorname{tr}(A^{-1}CL) = \operatorname{tr}(LA^{-1}C)$: la propriété $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$ est valable avec $M \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $N \in \mathcal{M}_{q,p}$, on peut au besoin demander de la justifier.
Mais $LA^{-1}C \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{tr}(LA^{-1}C) = LA^{-1}C$.
On conclut facilement.

- **Troisième méthode**
  On suppose $LA^{-1}C = -1$.
  $A + B = A + CL = A(I_n + A^{-1}CL)$
  $A^{-1}(A+B) = I_n + A^{-1}CL$
  $LA^{-1}(A+B) = L(I_n + A^{-1}CL) = L + LA^{-1}CL = L + (-1)L = 0$
  $LA^{-1} \neq 0$ car $LA^{-1}C = -1$
  Donc $A + B \notin GL_n(\mathbb{R})$.
  Par contrapposition :
  $A + B$ inversible $\Longrightarrow LA^{-1}C \neq -1$

  On suppose $A + B$ non inversible.
  Il existe X colonne non nulle telle que $(A+B)X = 0$.
  $(A + CL)X = 0$
  $LX \neq 0$ sinon $AX = 0$ (avec la ligne précédente) avec $X \neq 0$ et A inversible.
  On multiplie par LA^{-1} à gauche :
  $LX + LA^{-1}CLX = 0$
  $(1 + LA^{-1}C)LX = 0$ où $1 + LA^{-1}C$ est un réel et LX un réel non nul.
  Donc $1 + LA^{-1}C = 0$.
- **Quatrième méthode**
  $A + B = A + CL = A(I_n + A^{-1}CL)$
  A est inversible donc le rang de $A + B$ est égal à celui de $I_n + A^{-1}CL$.
  $A^{-1}CL$ est de même rang que CL qui est de rang 0 ou 1.
  Les valeurs propres de $A^{-1}CL$ sont $0, \dots, 0, \operatorname{tr}(A^{-1}CL)$.
  Les valeurs propres de $I_n + A^{-1}CL$ sont $1, \dots, 1, \operatorname{tr}(A^{-1}CL) + 1$.
  On en déduit :
  $A + B$ inversible $\Longleftrightarrow \operatorname{tr}(A^{-1}CL) + 1 \neq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(A^{-1}CL) \neq -1$
  Mais $A^{-1}CL = (A^{-1}C) \times L$ avec $A^{-1}C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc :
  $\operatorname{tr}(A^{-1}CL) = \operatorname{tr}(LA^{-1}C)$ (à rejustifier ?)
  Or $LA^{-1}C \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{tr}(LA^{-1}C) = LA^{-1}C$.
  D'où le résultat.

Exercice 21 *(CCP 2019)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors 0 est valeur propre de $v \circ u$.
2. Dans les questions 2 et 3, on suppose que u et v sont bijectives.
   (a) Exprimer $\det(\alpha v - v \circ u \circ v)$ en fonction de $\chi_{u \circ v}(\alpha)$ et de $\det(v)$, puis en fonction de $\chi_{v \circ u}(\alpha)$ et de $\det(v)$.
   En déduire $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$.
   (b) Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.
3. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$ et de $v \circ u$.
   Soit E_λ le sous-espace propre de $u \circ v$ associé à λ.
   Soit E'_λ le sous-espace propre de $v \circ u$ associé à λ.

(a) Montrer que $v(E_\lambda) \subset E'_\lambda$.
On montrerait de même que $u(E'_\lambda) \subset E_\lambda$.

(b) Montrer que $\dim(E_\lambda) = \dim(E'_\lambda)$.

(c) Montrer que si $u \circ v$ est diagonalisable alors $v \circ u$ est diagonalisable.

4. On suppose $\beta id_E - u \circ v$ bijective. On note w sa bijection réciproque.
Montrer que $(\beta id_E - v \circ u)(Id_E + v \circ w \circ u) = \beta id_E$.
En déduire $\beta id_E - v \circ u$ bijective.

5. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Correction

1.

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v) &\iff \det(u \circ v) = 0 \\ &\iff \det(u)\det(v) = 0 \\ &\iff \det(v)\det(u) = 0 \\ &\iff \det(v \circ u) = 0 \\ &\iff 0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u) \end{aligned}$$

2. (a) $\det(\alpha v - v \circ u \circ v) = \det(v)\chi_{u\circ v}(\alpha) = \det(v)\chi_{v\circ u}(\alpha)$
v étant bijective, on conclut facilement.

(b) $u \circ v$ et $v \circ u$ ont le même polynôme caractéristique !

3. (a) Soit $x \in E_\lambda$.
$uv(x) = \lambda x$.
Donc $(vu)(v(x)) = \lambda v(x)$.
D'où $v(x) \in E'_\lambda$.
On a bien $v(E_\lambda) \subset E'_\lambda$.

(b) u et v étant bijectives, elles conservent la dimension.
On déduit des inclusions de la question précédente :
$\dim(E_\lambda) \leq \dim(E'_\lambda)$ et $\dim(E'_\lambda) \leq \dim(E_\lambda)$

(c) Il y a équivalence en fait. On utilise la caractérisation avec la somme des dimensions des sous-espaces propres.

4. On a donc $\beta w - u \circ v \circ w = \beta w - w \circ u \circ v = id_E$.

$$\begin{aligned} (\beta id_E - v \circ u)(Id_E + v \circ w \circ u) &= \beta id_E + \beta v \circ w \circ u - v \circ u - v \circ u \circ v \circ w \circ u \\ &= \beta id_E + \beta v \circ w \circ u - v \circ u - v(\beta w - id_E) \circ u \\ &= \beta id_E + \beta v \circ w \circ u - v \circ u - \beta v \circ w \circ u + v \circ u \\ &= \beta id_E \end{aligned}$$

Si $\beta \neq 0$, on a bien $\beta id_E - v \circ u$ inversible.
Si $\beta = 0$, on a supposé $-u \circ v$ inversible. u et v le sont donc ainsi que $-v \circ u$.

5. En inversant le rôle de u et de v, on a :
$\beta id_E - u \circ v$ inversible $\iff \beta id_E - v \circ u$ inversible.
On conclut facilement.

Exercice 22 *(Mines 2021)*

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme non nul, on appelle valuation de P, et on note $\mathrm{Val}(P)$ le plus petit entier k tel que a_k est non nul.
Par convention, la valuation du polynôme nul est $+\infty$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
Soit P le polynôme tel que :
$\forall t \in \mathbb{C}\ P(t) = \det(tA + B)$
Montrer que le rang de A est supérieur ou égal au degré de P et que le rang de B est supérieur ou égal à $n - \mathrm{Val}(P)$.

Correction
Plusieurs méthodes sont possibles :

- **Première méthode**
  Soit r le rang de A et s celui de B.
  $\det(tA + B)$ est le déterminant dans la base canonique de la famille $(tC_j(A) + C_j(B))_{1 \leq j \leq n}$.
  Le développement par multilinéarité de ce déterminant est une somme de 2^n termes : pour chaque colonne on choisit la colonne de A ou celle de B.
  Si on choisit la colonne de A plus de $r + 1$ fois, on a le déterminant d'une famille liée : il est nul.
  Il ne reste donc que les déterminants où on a choisi au plus r fois $tC_j(A)$. Ils sont tous de degré au plus r donc leur somme aussi.
  De même si on choisit la colonne de B plus de $s+1$ fois, on a le déterminant d'une famille liée : il est nul.
  Il ne reste donc que les déterminants où on a choisi au plus s fois $C_j(B)$ et donc au moins $n - s$ fois $tC_j(A)$. Ils sont tous de valuation au moins $n - s$ donc leur somme aussi.
  On a donc $\mathrm{Val}(P) \geq n - s$ donc $s \geq n - \mathrm{Val}(P)$.
- **Deuxième méthode**
  Le déterminant d'une matrice étant une fonction polynômiale de ses coefficients, la définition de P est bien celle d'un polynôme.
  Soit r le rang de A.
  Si $r = n$ alors A est inversible et :
  $\forall t \in \mathbb{C}\ P(t) = \det(A)\det(tI_n + A^{-1}B) = \det(A)\chi_{-A^{-1}B}(t)$
  Comme $\det(A)$ est non nul, P est de degré n égal au rang de A.
  Si $r = 0$ alors A est nul, P est le polynôme constant égal à $\det(B)$.
  Si B est inversible, P est de degré 0, inférieur ou égal au rang de A.
  Si B n'est pas inversible, P est de degré $-\infty$, inférieur ou égal au rang de A.
  On suppose désormais $0 < r < n$.
  Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée au noyau de A :
  $A = P \begin{pmatrix} 0 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $A_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C})$ et $A_4 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$
  $P^{-1}BP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire : $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$
  $\forall t \in \mathbb{C}^*\ P(t) = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 + tA_2 \\ B_3 & B_4 + tA_4 \end{vmatrix} = t^r \begin{vmatrix} B_1 & 1/tB_2 + A_2 \\ B_3 & 1/tB_4 + A_4 \end{vmatrix}$ en utilisant la linéarité par rapport à chaque colonne.

$\begin{vmatrix} B_1 & 1/tB_2 + A_2 \\ B_3 & 1/tB_4 + A_4 \end{vmatrix} \xrightarrow[|t| \to +\infty]{} \begin{vmatrix} B_1 & A_2 \\ B_3 & A_4 \end{vmatrix} \in \mathbb{C}$ donc :
$P(t) = O(t^r)$ lorsque le module de t tend vers $+\infty$.
Mais si P est non nul $P(t) \sim a_d t^d$ où d est le degré de P donc $d \leq r$.
Si P est nul, P est de degré $-\infty$, inférieur ou égal au rang de A.
P est nul par exemple si la première colonne de A et la première colonne de B sont nulles.

Si B est nulle, alors :
$\forall t \in \mathbb{C}\ P(t) = t^n \det(A)$
Donc P est de valuation n ou $+\infty$.
Donc $n - \mathrm{Val}(P) = 0$ ou $-\infty$ inférieur ou égal au rang de B.
Si B est inversible alors $\mathrm{rg}(B) = n \geq n - \mathrm{Val}(P)$ car la valuation de P est positive.
On note alors r le rang de B qu'on suppose strictement compris entre 0 et n.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à l'image de B :
$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $B_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C})$.
$P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$
$\forall t \in \mathbb{C}\ P(t) = \begin{vmatrix} B_1 + tA_1 & B_2 + tA_2 \\ tA_3 & tA_4 \end{vmatrix} = t^{n-r} \begin{vmatrix} B_1 + tA_1 & B_2 + tA_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ en utilisant la linéarité par rapport à chaque ligne.
La fonction $t \mapsto \begin{vmatrix} B_1 + tA_1 & B_2 + tA_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$ étant elle-même polynômiale, le polynôme X^{n-r} divise le polynôme P.
Par conséquent, $\mathrm{Val}(P) \geq n - \mathrm{rg}(B)$ et on conclut facilement.

7 Matrices diagonalisables

Exercice 23 *(Mines 2019)*

Etude de la diagonalisation de $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Correction

- **Première méthode**
  Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^3$.
  $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 + \alpha x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda^3 - \lambda - \alpha)x_3 = 0 \\ x_1 = \lambda^2 x_3 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases}$
  Si $\lambda^3 - \lambda - \alpha \neq 0$:
  $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff X = 0$
  Si $\lambda^3 - \lambda - \alpha = 0$:

$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 = \lambda^2 x_3 \\ x_2 = \lambda x_3 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \lambda$ racine de $P = X^3 - X - \alpha$

et alors $\dim(E_\lambda(A)) = 1$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable sur } \mathbb{C} \quad &\iff \quad \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A) = 3 \\ &\iff \quad \operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(A)) = 3 \\ &\iff \quad P \text{ a trois racines simples dans } \mathbb{C} \end{aligned}$$

$P'(X) = 3X^2 - 1$, ses racines sont : $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Seuls ces deux nombres peuvent être racines multiples de P.

Pour ces deux nombres : $z^3 - z = z(z^2 - 1) = -\dfrac{2}{3}z = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Finalement : $M(\alpha)$ diagonalisable $\iff \alpha \neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

- **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{M(\alpha)}(\lambda) \quad &= \quad \det(\lambda I_3 - M(\alpha)) \\ &= \quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -\alpha \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \quad \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \quad \lambda^3 - \lambda - \alpha \end{aligned}$$

De plus, on remarque que la matrice $M(\alpha) - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \alpha \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ est de rang supérieur ou égal à 2 car les deux première colonnes sont échelonnées.

On en déduit que le noyau de $\operatorname{Ker}(M(\alpha) - \lambda I_3)$ est de dimension 0 ou 1 et donc que les sous-espaces propres de $M(\alpha)$ sont de dimension 1.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de $M(\alpha)$ est égal au cardinal de son spectre donc :

$$\begin{aligned} M(\alpha) \text{ diagonalisable} \quad &\iff \quad \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M(\alpha))} \dim(E_\lambda(M(\alpha))) = 3 \\ &\iff \quad \operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(M(\alpha))) = 3 \\ &\iff \quad \chi_{M(\alpha)} = X^3 - X - \alpha \text{ a trois racines simples dans } \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\chi'_{M(\alpha)}(X) = 3X^2 - 1$, ses racines sont : $z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Seuls ces deux nombres peuvent être racines multiples de $\chi_{M(\alpha)}$.

Pour ces deux nombres : $z^3 - z = z(z^2-1) = -\frac{2}{3}z = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Finalement : $M(\alpha)$ diagonalisable $\Longleftrightarrow \alpha \neq \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Exercice 24 *(Mines 2021)*

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$.

1. CNS pour que M soit diagonalisable.
2. Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, montrer qu'elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calcul de M^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Correction

La matrice M est symétrique donc si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, elle est diagonalisable.
Par contre, dans le cas général on ne peut rien dire a priori.

1. Plusieurs solutions sont possibles, la remarque fondamentale étant que M est de rang 1.
   Je propose la solution suivante :
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   $M = XX^T$
   Par conséquent :
   $\forall Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})\ MY = (XX^T)Y = X(X^TY) = (X^TY)X = (xx_1 + yy_1 + zz_1)\,X$
   X étant non nul, $\operatorname{Ker}(M) = \left\{ Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \text{ tq } xx_1 + yy_1 + zz_1 \right\}$.
   0 est donc valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est de dimension 2, la multiplicité au moins 2.
   Il nous manque une valeur propre, c'est $\operatorname{tr}(M) = x^2 + y^2 + z^2$.
   On en déduit :
   M diagonalisable $\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.
   En effet si $x^2+y^2+z^2 = 0$ alors 0 est valeur propre triple et le sous-espace propre associé est de dimension 2.
   Si $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ alors 0 est valeur propre double avec un sous-espace propre associé de dimension 2 et $x^2+y^2+z^2$ est valeur propre simple avec un sous-espace propre associé de dimension nécessairement égale à 1.
2. On suppose donc $x^2+y^2+z^2 = 0$.
   $MX = (x^2+y^2+z^2)X = 0 : X \in \operatorname{Ker}(M)$.
   X est non nul et $\operatorname{Ker}(M)$ est de dimension 2 donc il existe $Y \in \operatorname{Ker}(M)$ tel que (X,Y) est une base de $\operatorname{Ker}(M)$.
   $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ donc $Z = \begin{pmatrix} 1/x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/y \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/z \end{pmatrix}$ est bien défini et

c'est un antécédent de X.
Montrons que (X, Y, Z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $aX + bY + cZ = 0$.
On multiplie par M à gauche : il reste $cX = 0$ avec $X \neq 0$ donc $c = 0$.
Il reste $aX + bY = 0$ avec (X, Y) libre donc $a = b = 0$.
(X, Y, Z) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc (X, Y, Z) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à (X, Y, Z) alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $M^2 = (XX^T)(XX^T) = X(X^TX)X^T$ avec $X^TX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ qu'on peut identifier à $\mathbb{C}$.
Donc $M^2 = (X^TX)XX^T = (x^2 + y^2 + z^2)M$.
On peut en déduire par récurrence :
$\forall p \in \mathbb{N}^*\ M^p = (x^2 + y^2 + z^2)^{p-1}M$

Exercice 25 *(Centrale 2015, maths 1)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{n} & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n}{n} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Indication fournie par l'examinateur (mais quand ?)
On pourra penser à exprimer l'endomorphisme associé à la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Remarque
Cet exercice est tombé, sans indication, aux Mines en 2022 et en 2025.

Correction
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique est nM.
$\varphi(1) = nX$
$\varphi(X) = (n-1)X^2 + 1$
$\varphi(X^2) = (n-2)X^3 + 2X$
$\varphi(X^n) = nX^{n-1}$
$\varphi(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^{k-1} = nXP - X^2P' + P'$ où $P = X^k$.
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ \varphi(P) = (1 - X^2)P' + nXP$
On s'intéresse donc à l'équa diff $(1 - x^2)y' + nxy = \lambda y$
On travaille sur $]-1, 1[$.

$y' = \dfrac{\lambda - nx}{1-x^2} y$

$$\begin{aligned}\int \frac{\lambda - nx}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} - n\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{n}{2}\ln\left|1-x^2\right|\end{aligned}$$

$y = C\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\lambda}{2}}(1-x^2)^{\frac{n}{2}} = C(1+x)^{\frac{\lambda+n}{2}}(1-x)^{\frac{n-\lambda}{2}}$

Il y a une solution polynomiale non nulle $\iff \begin{cases}\lambda + n = 2k \\ n - \lambda = 2l\end{cases}$ avec $(k,l) \in \mathbb{N}$

$\implies \lambda = n - 2l$ et $k + l = n$ d'où $l \in \{0; \dots ; n\}$.
Réciproquement si $\lambda = n - 2l$ avec $l \in \{0; \dots ; n\}$.
$\lambda + n = 2n - 2l = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$
Etant donné que $]-1,1[$ est infini, si P est solution sur $]-1,1[$ il l'est aussi sur $\mathbb{R}$.
D'où les solutions polynomiales non nulles :
$P = C(1+x)^{n-l}(1-x)^l$ avec $l \in \{0; \dots ; n\}$ et $\lambda = n - 2l$.
Ces polynômes appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$.
M a donc $n+1$ valeurs propres distinctes : $\dfrac{n}{n}, \dfrac{n-2}{n}, \dots, \dfrac{-n}{n}$ donc M est diagonalisable et on a les sous-espaces propres.

Exercice 26 *(Mines 2001)*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & e & f & g \\ 0 & 1 & h & i \\ 0 & 0 & 1 & j \end{pmatrix}$. Montrer que :
A diagonalisable $\iff$ A possède 4 valeurs propres distinctes.

Correction
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & c & d \\ 1 & e-\lambda & f & g \\ 0 & 1 & h-\lambda & i \\ 0 & 0 & 1 & j-\lambda \end{pmatrix}$ est de rang 3 ou 4 à cause de l'échelonnement.
Donc les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égal au cardinal du spectre de A donc :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = 4 \\ &\iff \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = 4 \end{aligned}$$

Exercice 27 *(D'après X 2011)*

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ m_{i,j} = a^{i-j}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Correction

De nombreuses méthodes sont possibles pour cet exercice :

- **Première méthode**

  Le polynôme caractéristique n'étant pas facile à calculer, on cherche les couples propres.
  Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \forall i \in [\![1;n]\!] \sum_{j=1}^{n} a^{i-j} x_j = \lambda x_i \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!] \sum_{j=1}^{n} a^{-j} x_j = \lambda a^{-i} x_i \end{aligned}$$

  On remarque que $\lambda a^i x_i$ est alors indépendant de x.
  On commence donc par le cas $\lambda = 0$.
  $MX = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a^{-j} x_j = 0$
  Donc 0 est valeur propre de M, la dimension du sous-espace propre associé étant $n-1$.
  (on écarte le cas $n = 1$ de peu d'intérêt).
  Si λ est non nul, on a :
  $\forall i \in [\![1;n]\!]\ a^{-i} x_i = a^{-1} x_1$
  Donc $X \in \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$
  Réciproquement la i-ème cordonnée de $M \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$ est $\sum_{j=1}^{n} a^{i-j} a^{j-1} = n a^{i-1}$
  Donc les valeurs propres de M sont 0 et n, les sous-espaces propres associés étant de dimensions $n-1$ et 1.
  Au vu de la somme de ces dimensions, M est diagonalisable.

- **Deuxième méthode**

  Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
  $\chi_M(\lambda)$ est le déterminant de la matrice dont le coefficient à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne vaut $-a^{i-j}$ si $i \neq j$ et $\lambda - 1$ si $i = j$.
  Compte tenu des propriétés des déterminants, on factorise α^i dans la $i$ème ligne.
  $\chi_M(\lambda) = \alpha^{1+2+\cdots+n} \Delta_1$ où Δ_1 est le déterminant de la matrice dont le coefficient à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne vaut $-a^{-j}$ si $i \neq j$ et $\alpha^{-i}(\lambda-1) = \alpha^{-j}(\lambda-1)$ si $i = j$.
  On factorise ensuite α^{-j} dans la $j$ème colonne.
  $\chi_M(\lambda) = \alpha^{1+2+\cdots+n} \alpha^{-(1+2+\cdots+n)} \Delta_2$ où Δ_2 est le déterminant de la matrice dont le coefficient à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne vaut -1 si $i \neq j$ et $\lambda - 1$ si $i = j$.
  On ajoute ensuite toutes les lignes à la première :

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - n & \lambda - n & \dots & \lambda - n \\ -1 & \lambda - 1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & \dots & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & \dots & -1 \\ \vdots & & & \\ -1 & \dots & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite la première ligne à toutes les autres :

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$$

Les valeurs propres de M sont n simple et 0 de multiplicité $n-1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_0(M) &\iff \forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} a^{i-j} x_j = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1;n]\!] \ a^i \sum_{j=1}^{n} a^{-j} x_j = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^{n} a^{-j} x_j = 0 \\ &\iff x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j} x_j \end{aligned}$$

On en déduit que $E_0(M)$ est de dimension $n-1$ et a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -a^{n-2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right)$.

n étant valeur propre simple, on peut affirmer que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

χ_M est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité donc M est diagonalisable.

Reste à trouver un vecteur propre pour la valeur propre M.

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles sont toujours dans l'image qui est ici la droite engendrée par la colonne $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$

$\forall i \in [\![1;n]\!] \ (Mv)_i = \sum_{j=1}^{n} a^{i-j} a^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} a^{i-1} = n a^{i-1} = n v_i$

Donc $Mv = nv$.

Comme n est valeur propre simple, $E_n(M) = \mathbb{C}v$.

- **Troisième méthode**

  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ m_{i,j} = a^{i-j} = a^{1-j} \ a^{i-1} = a^{1-j} m_{i,1}$

  Donc :

  $\forall j \in [\![1;n]\!] \ C_j(M) = a^{1-j} C_1(M)$

  De plus $C_1(M) \neq 0$ donc M est de rang 1.

  Classiquement :

  M diagonalisable $\iff \operatorname{tr}(M) \neq 0$

  Comme $\operatorname{tr}(M) = n$, M est diagonalisable.

Les valeurs propres de M sont 0 de multiplicité $n-1$ et n simple.
Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 0 est l'hyperplan d'équation $a^{n-1}x_1 + \cdots + ax_{n-1} + x_n = 0$

Si on note $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \dots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$ alors :

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $(Mv)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a^{i-j}a^{j-1} = \sum_{j=1}^{n} a^{i-1} = na^{i-1} = nv_i$

Donc $Mv = nv$.

Comme n est valeur propre simple, $E_n(M) = \mathbb{C}v$.

- **Quatrième méthode**

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ $m_{i,j} = a^{i-j} = a^i a^{-j}$

On note C la colonne $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ et L la ligne $\begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-2} & \dots & a^{-n} \end{pmatrix}$ de sorte que $M = CL$.

On a alors pour une colonne X : $MX = (CL)X = C(LX)$ où LX est une matrice à une ligne et une colonne, qu'on peut identifier à un nombre donc :

$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ $MX = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a^{-j}x_j\right) C$

C étant non nulle :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_0(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} a^{i-j}x_j = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1;n]\!] \ a^i \sum_{j=1}^{n} a^{-j}x_j = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a^{-j}x_j = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x_n = -\sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j}x_j
\end{aligned}$$

On en déduit que $E_0(M)$ est de dimension $n-1$ et a pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -a^{n-2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Si $MX = \lambda X$ alors $X = \dfrac{LX}{\lambda} C$ est colinéaire à C.

Réciproquement $MC = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a^{-j}c_j\right) C = \left(\sum_{j=1}^{n} a^{-j}a^j\right) C = nC$ donc M a une seule valeur propre non nulle : n, le sous-espace propre associé étant la droite dirigée par C. La somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut n donc M est diagonalisable.

Exercice 28 *(X 2020)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Indication (donnée à quel moment ?)
Cas $n = 1$, puis généralisation.

Correction
On commence par le cas $n = 1$ ie $B = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -a & 3a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
$B = aC$ avec $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
$\chi_C = X^2 - \mathrm{tr}\,(C)X + \det(C) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$
χ_C est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc C est diagonalisable.
Des calculs simples donnent $E_1(C) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(C) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a donc $C = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Passons au cas général.
A est diagonalisable donc il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = Q\Delta Q^{-1}$.
Soit $R = \begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}$.
L'inverse de P est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Un calcul par blocs donne :
$\begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$
Donc R est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} R^{-1}BR &= \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ -Q^{-1} & 2Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2AQ & 2AQ \\ AQ & 2AQ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q^{-1}AQ & 0 \\ 0 & 2Q^{-1}AQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R^{-1}BR$ est diagonale (et pas seulement diagonale par blocs) donc B est diagonalisable.
Autre méthode : on cherche les couples propres.

$$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2AY = \lambda X \\ -AX + 3AY = \lambda Y \end{cases}$$

On commence par le cas $\lambda = 0$.

$$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2AY = 0 \\ -AX + 3AY = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} AX = 0 \\ AY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X \in \mathrm{Ker}\,(A) \\ Y \in \mathrm{Ker}\,(A) \end{cases}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(B)$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\,(A) \times \mathrm{Ker}\,(A)$.
Donc :
0 valeur propre de $B \iff 0$ valeur propre de A
et dans ce cas :
$\dim(E_0(B)) = 2\dim(E_0(A))$
On considère ensuite $\lambda \neq 0$.

$$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ -\dfrac{2}{\lambda}A^2Y + 3AY = \lambda Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ -2A^2Y + 3\lambda AY = \lambda^2 Y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ (\lambda^2 I_n - 3\lambda A + 2A^2)Y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ (\lambda I_n - A)(\lambda I_n - 2A)Y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ (\lambda I_n - 2A)(\lambda I_n - A)Y = 0 \end{cases}$$

Si λ n'est valeur propre ni de A ni de $2A$ alors les matrices $\lambda I_n - A$ et $\lambda I_n - 2A$ sont inversibles et :
$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$
λ n'est pas valeur propre de B.
Si λ est valeur propre de A mais λ n'est pas valeur propre de $2A$:
$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ Y \in E_\lambda(A) \end{cases} \iff \begin{cases} X = 2Y \\ Y \in E_\lambda(A) \end{cases}$
Dans ce cas, λ est valeur propre de B et :
$\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_\lambda(A))$
Si λ est valeur propre de $2A$ mais λ n'est pas valeur propre de A :
$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ Y \in E_\lambda(2A) \end{cases} \iff \begin{cases} X = Y \\ Y \in E_\lambda(2A) \end{cases}$
Dans ce cas :
λ est valeur propre de B et :
$\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_\lambda(2A))$
Si λ est valeur propre de A et de $2A$ alors, en restant dans le cadre du programme de PC (ie sans utiliser le théorème de décomposition des noyaux) :
$B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = \dfrac{2}{\lambda}AY \\ (\lambda I_n - 2A)Y \in E_\lambda(A) \end{cases}$
On a classiquement :
$\dim(u^{-1}(F)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(u)) + \dim(\mathrm{Im}\,(u) \cap F)$

Si $AX = \lambda X$ alors $X = (2A - \lambda I_n)\left(\dfrac{1}{\lambda}X\right)$ donc $E_\lambda(A) \subset \mathrm{Im}\,(\lambda I_n - 2A)$
On en déduit que λ est valeur propre de B mais cette fois :
$\dim\left(E_\lambda(B)\right) = \dim\left(E_\lambda(2A)\right) + \dim\left(E_\lambda(A)\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) &= 2\dim\left(E_0(A)\right) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\setminus(\mathrm{Sp}(2A)\cup\{0\})} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(2A)\setminus(\mathrm{Sp}(A)\cup\{0\})} \dim(E_\lambda(2A)) \\
&\quad + \sum_{\lambda \in (\mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(2A))\setminus\{0\}} \left(\dim(E_\lambda(A)) + \dim(E_\lambda(2A))\right) \\
&= 2\dim\left(E_0(A)\right) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)\setminus\{0\}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(2A)\setminus\{0\}} \dim(E_\lambda(2A))
\end{aligned}$$

Le noyau de A est le même que celui de $2A$ donc :
$\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(2A)} \dim(E_\lambda(2A))$
Par hypothèse, A est diagonalisable. On en déduit facilement que $2A$ l'est aussi donc :
$\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2n$ et B est diagonalisable.

Exercice 29 *(X 2020)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
On définit $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$

1. Montrer que si A et B sont inversibles alors $A \otimes B$ est inversible.
2. Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $A \otimes B$ est diagonalisable.

Correction

- On commence par montrer :
  $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\ \forall (B_1, B_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2\ (A_1 \otimes B_1) \times (A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$
  Pour cela on se donne $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(B_1, B_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$.
  $A_1 \otimes B_1$ et $A_2 \otimes B_2$ sont deux matrices $n \times n$ par blocs, tous les blocs étant $p \times p$.
  Donc $(A_1 \otimes B_1) \times (A_2 \otimes B_2)$ est bien définie. C'est une matrice $n \times n$ par blocs, tous les blocs étant $p \times p$.
  Le bloc (i, j) est :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (A_1)_{i,k}B_1.(A_2)_{k,j}B_2 &= \sum_{k=1}^{n} \left((A_1)_{i,k}(A_2)_{k,j}B_1B_2\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (A_1)_{i,k}(A_2)_{k,j}\right) B_1B_2 = (A_1A_2)_{i,j}B_1B_2
\end{aligned}$$

  Donc :
  $(A_1 \otimes B_1) \times (A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$
- On passe à la première question.
  On se donne $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B \in GL_p(\mathbb{C})$.
  $(A \otimes B) \times (A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_n \otimes I_p = I_{np}$
  Donc $A \times B$ est inversible et $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

- On passe à la seconde question.
  On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable.
  $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.
  $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $Q^{-1}BQ = \Delta$ avec $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale.

$$\begin{aligned}(P \otimes Q)^{-1}.(A \otimes B).(P \otimes Q) &= (P^{-1} \otimes Q^{-1})\,((AP) \otimes (BQ)) \\ &= (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ) \\ &= D \otimes \Delta\end{aligned}$$

$D \otimes \Delta = \begin{pmatrix} d_{1,1}\Delta & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_{n,n}\Delta \end{pmatrix}$ est diagonale et pas seulement diagonale par blocs ?

8 Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 30 *(Mines 2011)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$. On suppose que 1 et -1 sont des valeurs propres de A.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction

- **Premier cas :** $0 \in \mathrm{Sp}(A)$
  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a au moins trois valeurs propres distinctes. Comme elle ne peut pas en avoir plus, elle en a exactement 3 et A est diagonalisable.

- **Deuxième cas :** $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$
  A est inversible donc $A^2 = I_3$.
  u_A est donc une symétrie et u_A est diagonalisable.
  A est donc diagonalisable.

Exercice 31 *(Mines 2012)*

Trouver $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{tr}\,(M) = n$.

Correction :
Soit λ une valeur propre complexe de M.
Soit X un vecteur propre associé.
$M^5 = M^2$ donc $\lambda^5 X = M^5 X = M^2 X = \lambda^2 X$
X est non nul donc $\lambda^5 = \lambda^2$ donc $\lambda = 0$ ou $\lambda^3 = 1$.
Les valeurs propres complexes de M sont donc :

- 0 de multiplicité α (en autorisant α à être nul).
- 1 de multiplicité β
- j de multiplicité γ
- $\overline{j}$ de multiplicité γ (la même que j puisque M est réelle)

Avec la trace, on obtient :$n = \beta + \gamma(j + \overline{j}) = \beta - \gamma$
Donc $\beta = n + \gamma \geq n$. Mais β est inférieure à n (le degré de χ_M) donc $\beta = n$.

On en déduit que M a une seule valeur propre (réelle ou complexe) : 1 de multiplicité n.
Donc M est inversible et $M^3 = I_n$.

$$\begin{aligned}
(M - I_n)(M - j_I n)(M - \overline{j} I_n) &= (M - I_n)(M^2 - (j + \overline{j})M + |j|^2 I_n) = (M - I_n)(M^2 + M + I_n) \\
&= M^3 - M^2 + M^2 - M + M - I_n = M^3 - I_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Mais $M - jI_n$ et $M - \overline{j}I_n$ sont inversibles car j et $\overline{j}$ ne sont pas valeurs propres de M donc $M = I_n$.
La réciproque est triviale.