ANALYSE 1
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 3 :
Suites et séries de fonctions

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1 Convergence simple

1.1 Définition des suites et des séries de fonctions

On appelle suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$:
$$\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n \mapsto f_n \text{ une fonction de } I \text{ dans } \mathbb{K} \end{cases}$$
Une suite de fonctions est notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple $I = \mathbb{K} = \mathbb{R}$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n\ (0^0 = 1) \end{cases}$$
Remarque
Dans la pratique on aura souvent à considérer des applications :
$$\begin{cases} \{n \geq n_0\} \to \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) \\ n \mapsto f_n \end{cases}$$
On les appelle encore suite de fonctions et on les note $(f_n)_{n\geq n_0}$.
Cas particulier important : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

De même une série de fonctions est une série dont le terme général est une fonction (dépendant de n). On la note $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ ou $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f_n$ suivant les cas.

1.2 Définition de la convergence simple d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I si et seulement si pour tout x dans I $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe (dans $\mathbb{K}$) (ou ce qui revient au même : pour tout x dans I la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge).

Dans ce cas la fonction $f \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{cases}$ est appelée limite simple sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit aussi que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et on écrit $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

Remarque
La limite d'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{K}$ étant unique, la limite simple (lorsqu'elle existe) d'une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ est unique.

1.3 Exemples

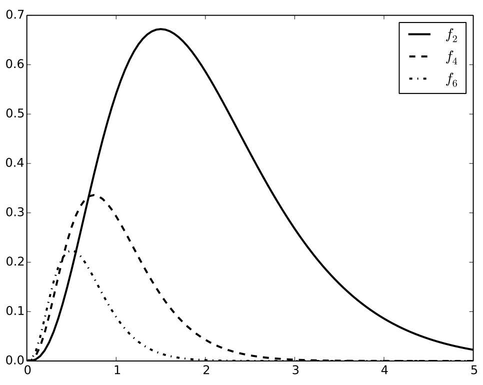
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \end{cases}$

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
  $1 + \dfrac{x_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc :
  $\exists n_{x_0} \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_{x_0}$ $1 + \dfrac{x_0}{n} > 0$
  $\forall n \geq n_{x_0}$ $f_n(x_0) > 0$
  $\forall n \geq n_{x_0}$ $\ln\left(f_n(x_0)\right) = n \ln\left(1 + \dfrac{x_0}{n}\right) \sim n\,\dfrac{x_0}{n} = x_0$
  Donc $\ln\left(f_n(x_0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ et $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{x_0}$.
  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
  $(x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Longleftrightarrow |x_0| < 1$ ou $x_0 = 1$

  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1;1]$ vers la fonction $f \begin{cases}]-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } |x| < 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$

- $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^2 x^3\,\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$



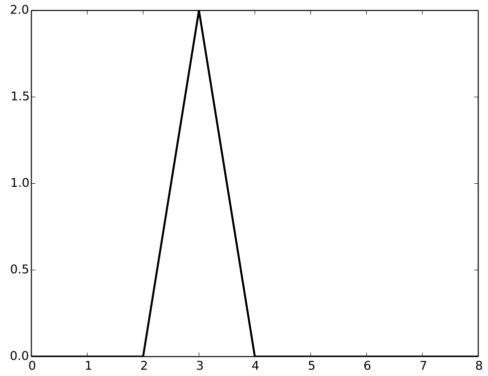
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.

— **Premier cas** $x_0 > 0$
  $n^2\, \mathrm{e}^{-nx_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

— **Deuxième cas** $x_0 = 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(x_0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

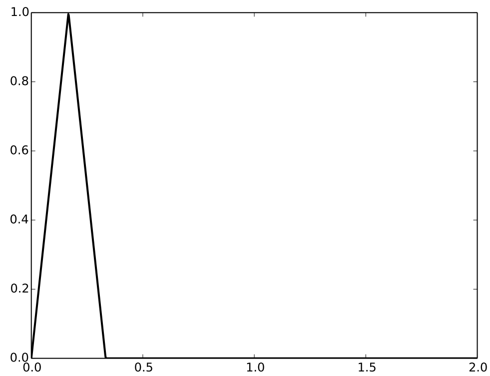
Finalement, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

- $I = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
  Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n : f_n est nulle sur $[0; n-1]$ et sur $[n+1; +\infty[$, $f_n(n) = M_n$, f_n est affine sur $[n-1; n]$ et sur $[n; n+1]$



  Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.
  $\exists n_{x_0} \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_{x_0}\ n - 1 \geq x$
  $\forall n \geq n_{x_0}\ f_n(x_0) = 0$
  Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

- $I = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
  Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n : f_n est nulle en 0 et sur $[1/n; +\infty[$, $f_n(1/(2n)) = M_n$, f_n est affine sur $[0; 1/(2n)]$ et sur $[1/(2n); 1/n]$.



Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.

— **Premier cas** $x_0 > 0$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$\exists n_{x_0} \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_{x_0}$ $\frac{1}{n} \leq x$

$\forall n \geq n_{x_0}$ $f_n(x_0) = 0$

Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

— **Deuxième cas** $x_0 = 0$

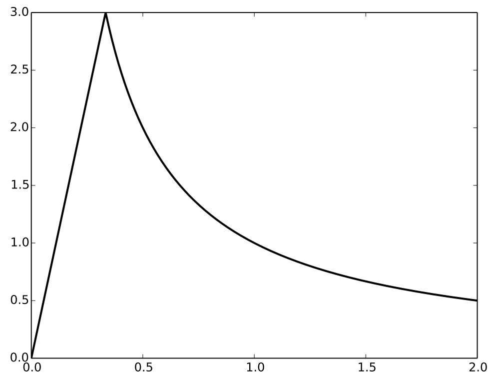
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x_0) = 0$

Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

- $I = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n : f_n est nulle sur $[0; 1/n]$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1/n; +\infty[$.



Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.

— **Premier cas** $x_0 > 0$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$\exists n_{x_0} \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_{x_0}$ $\frac{1}{n} \leq x$

$\forall n \geq n_{x_0}$ $f_n(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x_0}$.

— **Deuxième cas** $x_0 = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x_0) = 0$

Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Pourtant f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, ni même continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

1.4 Définition de la convergence simple d'une série de fonctions

Deux points de vue, équivalents, sont possibles pour définir la convergence simple d'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$:

- De la même manière qu'on passe des suites numériques aux séries numériques, on passe des suites de fonctions aux séries de fonctions :
  On définit la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ par :
  $\forall p \in \mathbb{N}\ S_p = \sum_{n=0}^{p} f_n$ ie : $\forall p \in \mathbb{N}\ S_p \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{p} f_n(x) \end{cases}$.
  $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions.
  On dit alors que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I si, et seulement si, la suite de fonctions $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
  On a donc :
  $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $I \iff$ pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.
  Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I, on appelle somme de $\sum_{n\geq 0} f_n$, et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, la limite simple de la suite de fonctions $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ ie :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{cases}$$
  Ce point de vue sera privilégié dans les développements théoriques : en effet de chaque résultat sur les suites de fonctions on pourra déduire un résultat sur les séries de fonctions.

- Afin de pouvoir utiliser les résultats du cours sur les séries, en particulier les théorèmes qui permettent de déterminer la nature d'une série en examinant son terme général sans revenir aux sommes partielles, on peut adopter le point de vue suivant :
  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
  On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I si et seulement si pour tout x dans I la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.
  Dans ce cas la fonction $S \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{cases}$ est appelée somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.
  On écrit alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

1.5 Exemples

- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x}{1+n^2x^2}$
  Domaine de définition, continuité, que suggère une étude numérique sur la continuité en 0 ? $\lim_{0} f(x)$?

  Correction

  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$.

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

  — **Premier cas** $x_0 > 0$
  $f_n(x_0) \sim \dfrac{x_0}{n^2x_0^2} = \dfrac{1}{x_0}\dfrac{1}{n^2}$ et tout est positif.
  $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.

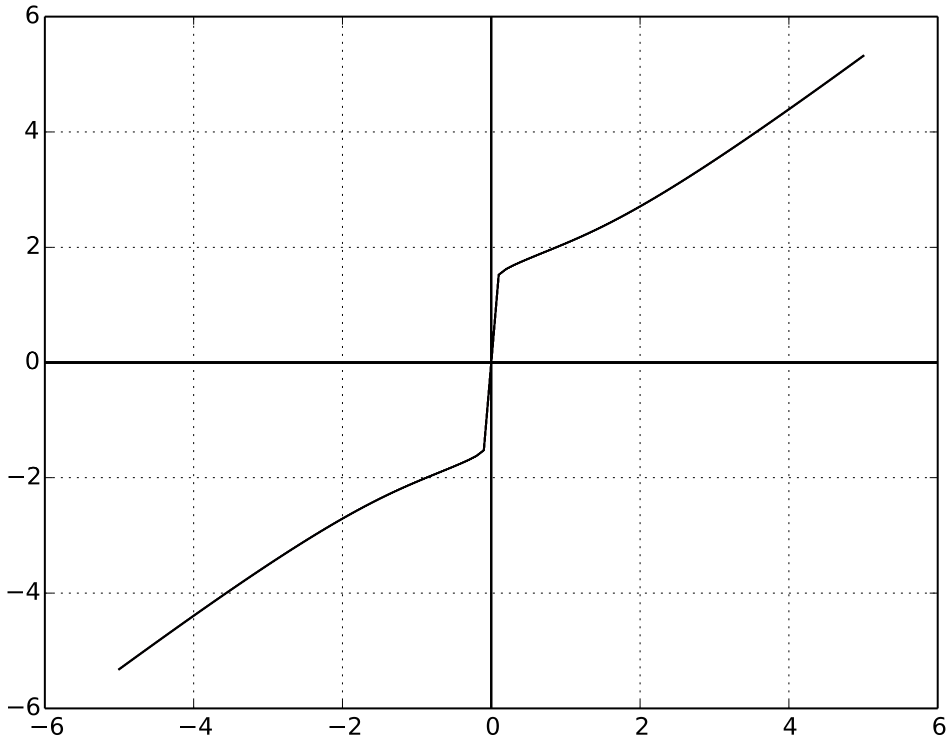
  — **Deuxième cas** $x_0 = 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(x_0) = 0$
  Donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.

  — **Deuxième cas** $x_0 < 0$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est impaire donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge.

  Finalement la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

  Avec Python

```
import matplotlib.pyplot as pypl

def f(x,N):
    return(x*sum((1+n**2*x**2)**(-1) for n in range(N+1)))

les_x=[x/10.0 for x in range(-50,51)]


les_y=[f(x,100) for x in les_x]


pypl.plot(les_x,les_y,color='black')

pypl.axhline(color='black')
pypl.axvline(color='black')

pypl.grid()
```



- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$.

  La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1; +\infty[$.

  En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1; +\infty[$. On l'appelle fonction zêta de Riemann et on la note ζ.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$.

  La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

  En d'autres termes, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est définie sur $]0; +\infty[$. On l'appelle fonction êta de Dirichlet et on la note η.

1.6 Insuffisance de la convergence simple : le cas de la continuité

Une limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue.

Exemple

$I = [0; 1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$.

Soit $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0;1]$ mais f n'est pas continue sur $[0;1]$.
Dans le même ordre d'idée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_n(x) = 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_n(x)\right) = 1$$

$$\forall x \in [0;1[\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \text{ donc } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = 0$$

On n'a pas le droit d'intervertir les passages à la limite.
Toujours dans le même ordre d'idée :
Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et si $x_n(\in I) \to x(\in I)$, on n'a pas forcément $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
En reprenant l'exemple précédent, si on prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ on a $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$.

2 Convergence uniforme

2.1 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

2.1.1 Définition

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :
$\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \ \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \ \forall x \in I \ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

On dit alors que f est limite uniforme sur I de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (f est unique car la convergence uniforme entraîne la convergence simple cf ci-dessous).
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite uniformément convergente sur I si et seulement si elle possède une limite uniforme sur I.

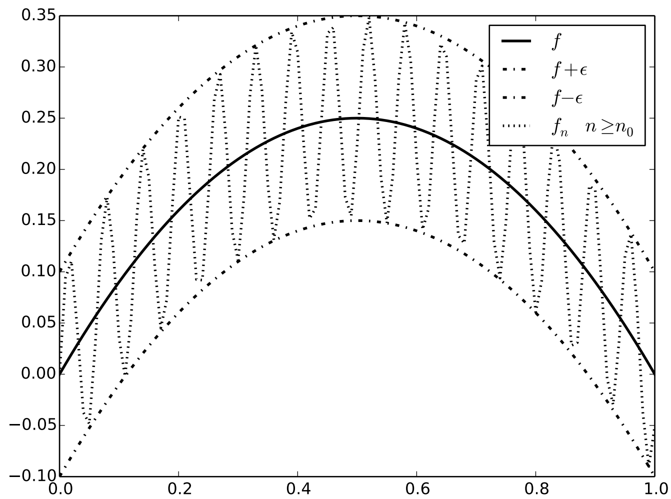
2.1.2 Remarques

- Avec les notations de la définition :
  la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \iff$ la suite de fonctions $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I (ie converge uniformément vers la fonction nulle sur I)
  C'est une conséquence immédiate de la définition.

- Dans la définition, on ne suppose rien sur les fonctions f_n et f. En particulier, $f_n - f$ n'est pas forcément bornée et il faut autoriser $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ à prendre la valeur $+\infty$, c'est pourquoi je n'ai pas utilisé la notation $\|f_n - f\|_\infty$.
  Toutefois, il résulte de la définition que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I alors à partir d'un certain rang $f_n - f$ est bornée.
- Dans la cas particulier où les fonctions considérées sont toutes bornées, on a la condition nécessaire et suffisante suivante :
  Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ bornée.
  La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  En d'autres termes, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'evn $(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$.
  Pour cette raison, $\|.\|_\infty \begin{cases} \mathcal{B}(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \sup\limits_{x\in I} |f(x)| \end{cases}$, qu'on a déjà vue dans le cours sur les normes, est appelée norme de la convergence uniforme (sur l'espace des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$).

2.1.3 Interprétation graphique

(notations de la définition)



2.1.4 Lien avec la convergence simple

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I alors elle converge simplement vers f sur I.

Démonstration
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
Soit $x_0 \in I$ fixé.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$.
Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.

La réciproque est fausse :
$I = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n : f_n est nulle sur $[0; n-1]$ et sur $[n+1; +\infty[$, $f_n(n) = M_n$, f_n est affine sur $[n-1; n]$ et sur $[n; n+1]$
On a déjà vu que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, quelque soit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Par contre, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = M_n$ donc :
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+ \iff M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Remarque
Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
Par définition on a :
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \forall x \in I\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
De même :
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I\ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in I\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$
La seule différence entre ces deux propriétés est l'ordre des quantificateurs pourtant il s'agit de deux notions différentes (on voit sur cet exemple que dans une proposition l'ordre des quantificateurs est fondamental).
Pour la convergence simple n_0 dépend de ϵ et de x alors que pour la convergence uniforme n_0 ne dépend que de ϵ.

2.1.5 Etude d'un exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^2 x^3\,\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$
On a déjà vu que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ f_n'(x) &= n^2 \left(2x^2\,\mathrm{e}^{-nx} - nx^3\,\mathrm{e}^{-nx}\right) \\ &= n^2 x^2\,\mathrm{e}^{-nx}(3 - nx) \end{aligned}$$

x	0		$3/n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	-	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{n\,\mathrm{e}^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

La démarche mise en oeuvre sur cet exemple est assez fréquente :
en pratique on a souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si on doit étudier une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{R}$ on commence par étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f on introduit :
$g_n \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |f_n(x) - f(x)| \end{cases}$ ou $h_n \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) - f(x) \end{cases}$ (plus facile à dériver)
et on étudie les variations de g_n ou de h_n de manière à calculer $\sup\limits_{x\in I} g_n(x) = \sup\limits_{x\in I} |h_n(x)| = \|f_n - f\|_\infty$.

Exemple
$f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+n}{1+nx}\right) \end{cases}$
Pour $x > 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$
$f_n(0) = \arctan n \xrightarrow[n\to+\infty]{}= \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan 0$
(f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f : x \mapsto \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ (f_n - f)'(x) &= f_n'(x) - f'(x) = \frac{\dfrac{1+nx-n(x+n)}{(1+nx)^2}}{1+\left(\dfrac{x+n}{1+nx}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1-n^2}{(1+nx)^2+(x+n)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{(1-n^2)x^2+1-n^2+(1+4nx+n^2x^2+n^2+x^2)}{(x^2+1)(1+4nx+n^2x^2+n^2+x^2)} \\ &= \frac{2(x^2+2nx+1)}{(x^2+1)(1+4nx+n^2x^2+n^2+x^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

$f_n - f$ croît de $-\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ à $\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
$\|f_n - f\|_\infty = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
Il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Toutefois l'étude des variations peut être longue voire même impossible, c'est le cas par exemple lorsqu'on ne sait pas résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$.
On utilise alors souvent la condition suivante :

2.1.6 Une condition suffisante de convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
Si il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- **i** $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$
- **ii** $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Remarque
Ce résultat très utile et très classique n'est pas explicitement mentionné dans le programme.
Peut-être faut-il écrire explicitement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|) \leq \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
donc $\sup\limits_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$?

Exemple

$$f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\left(x + \dfrac{(-1)^n}{n^2 + x^2 + 1}\right) \end{cases}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
$f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \arctan(x_0)$
Donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers arctan.

$$\begin{aligned} \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 \ |\arctan(y) - \arctan(z)| &\leq |y - z| \sup_{t \in [y;z]} \left(\left| \frac{1}{1+t^2} \right| \right) \quad \text{A.F.} \\ &\leq |y - z| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f(x) - \arctan(x)| &\leq \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2 + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + x^2 + 1} \\ &\leq \frac{1}{n^2 + 1} \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers arctan.

2.1.7 Remarque

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I $f_n(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

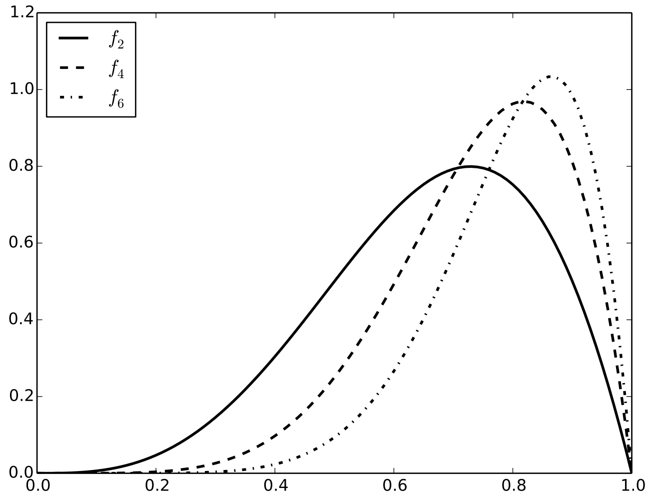
Ce résultat peut être utile pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme.
Exemple
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto nx^n \sin(\pi x) \end{cases}$.
Soit $x_0 \in [0;1]$ fixé.

- **Premier cas** $x_0 \in [0;1[$
  $nx_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- **Deuxième cas** $x_0 = 1$
  $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(1) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(f_n) converge simplement vers 0 sur $[0;1]$.

L'étude des variations de f_n est compliquée.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_n'(x) = nx^{n-1}(n \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x))$
et trouver les zéros de f_n' est compliqué.

Une étude expérimentale avec Python est envisageable :




```
from math import sin,pi
def cherche_les_max(N):
    pas=10**(-2)
    les_xmax=[]
    for n in range(1,N+1):
        xmax=0
        x=0
        le_max=0
        while x<1+pas:
            f=n*(x**n)*sin(pi*x)
            if f>le_max:
                xmax=x
                le_max=f
            x+=pas
        les_xmax.append(xmax)
    return les_xmax
truc=cherche_les_max(20)
print(truc)
[0.6500000000000004, 0.7300000000000004, 0.7800000000000005,
0.8200000000000005, 0.8400000000000005, 0.8600000000000005,
0.8800000000000006, 0.8900000000000006, 0.9000000000000006,
 0.9100000000000006, 0.9200000000000006, 0.9200000000000006,
  0.9300000000000006, 0.9300000000000006, 0.9400000000000006,
  0.9400000000000006, 0.9400000000000006, 0.9500000000000006,
  0.9500000000000006, 0.9500000000000006]
for n in range(1,21):
    print(n*(1-truc[n-1]))
 0.34999999999999964
0.5399999999999991
0.6599999999999986
```

```
0.7199999999999998
0.7999999999999974
0.8399999999999967
0.8399999999999961
0.8799999999999955
0.8999999999999948
0.8999999999999941
0.8799999999999935
0.9599999999999929
0.9099999999999921
0.9799999999999915
0.8999999999999908
0.9599999999999902
1.0199999999999896
0.8999999999999888
0.9499999999999882
0.9999999999999876
```

On prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) \\ &= n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{\mathrm{e}} \neq 0 \end{aligned}$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $[0;1]$.

2.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

2.2.1 Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si, la suite de fonctions $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
D'après le paragraphe sur les suites de fonctions, si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I elle converge simplement sur I, la réciproque étant fausse.

2.2.2 Utilisation du reste

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
On suppose que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.

Soit $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ sa somme.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $R_p = S - S_p \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \end{cases}$

$$\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } I \iff (S_p) \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } I$$
$$\iff (R_p) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } I$$

Remarque
Ce résultat n'est pas mentionné explicitement dans le programme mais à mon avis, il peut être utilisé directement.

Exemple
$f_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$
On a déjà vu que $\sum f_n$ CVS sur $[1;+\infty[$.
Montrons qu'il y a CVU.
On peut définir $R_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n$.
Soit $x \in [1;+\infty[$ fixé.
- $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée.
- $\left(\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.
- $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'après le TSCSA :
$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$
Donc :
$\forall x \in [1;+\infty[\ |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \dfrac{1}{n+1}$ indépendant de x et $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc (R_n) CVU vers 0 sur $[1;+\infty[$.
Donc $\sum f_n$ CVU sur $[1;+\infty[$

2.2.3 Condition nécessaire de convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Si la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I.

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$$

Exemple
$f_n \begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]1;+\infty[} (|f_n(x)|) = \sup\limits_{x\in]1;+\infty[} \left(\dfrac{1}{n^x}\right) = \dfrac{1}{n}$

$\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(f_n) CVU vers 0 sur $]1;+\infty[$.

Mais :

$\forall x \in]1;+\infty[\ R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t$

$\forall n \geq 1 \ \forall x > 1 \ |R_n(x)| = R_n(x) \geq \left[\dfrac{t^{1-x}}{1-x}\right]_{n+1}^{+\infty} = \dfrac{(n+1)^{1-x}}{x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x>1}]{} +\infty$

Donc :

$\forall n \geq 1 \ \sup\limits_{x\in]1;+\infty[} (|R_n(x)|) = +\infty$

(R_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $]1;+\infty[$.

$\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1;+\infty[$.

Démonstration de la proposition

Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ (resp. S) la suite des sommes partielles (resp. la somme) de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.

$f_n = S_n - S_{n-1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I} |f_n(x)| &= \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \\
&\leq \left(\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \\
&+ \left(\sup_{x\in I} |S_{n-1}(x) - S(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)
\end{aligned}$$

Remarque

Le résultat précédent sert surtout à prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Il n'est pas mentionné explicitement dans le programme et je pense qu'il faut le redémontrer quand on en a besoin.

Exemple

$f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sup\limits_{x\in]0;+\infty[} (|f_n(x)|) = \sup\limits_{x\in]0;+\infty[} \left(\dfrac{1}{n^x}\right) = 1$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $]0;+\infty[$.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0;+\infty[$.

3 Convergence normale d'une série de fonctions

3.1 Introduction

Plutôt qu'une notion nouvelle, il s'agit d'un moyen commode de montrer qu'une série de fonctions converge uniformément.

Dans la littérature de langue anglaise, on ne parle pas d'un mode nouveau de convergence mais du "Weierstrass M-test".
La convergence normale ne concerne que les séries de fonctions et pas les suites de fonctions.

3.2 Définition de la convergence normale

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, la série de nombres réels positifs $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.

3.3 Exemples

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{in^2x}}{n^2} \end{cases}$

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\left| \dfrac{\mathrm{e}^{in^2x}}{n^2} \right| \right) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\left| \dfrac{1}{n^2} \right| \right) = \dfrac{1}{n^2}$

  $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n+x}{n^3+x^2} \end{cases}$

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall x \in \mathbb{R}_+ \; f_n'(x) = -\dfrac{x^2+2nx-n^3}{(n^3+x^2)^2}$
  $\Delta = 4n^2 + 4n^3 = (2n)^2(n+1)$
  $\dfrac{-2n-2n\sqrt{n+1}}{2} < 0$ donc à écarter.
  Par contre $n(\sqrt{n+1}-1) > 0$.

x	0		$n(\sqrt{n+1}-1)$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	-	
f_n	$1/(n^2)$	$\nearrow$		$\searrow$	0

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \|f_n\|_\infty = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2n^2+2n-2n\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}} \geq 0$
  Or $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
  Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{nx^2}{n^3+x^2} \end{cases}$

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall x \in \mathbb{R}_+ \; f_n'(x) = \dfrac{2n^4x}{(n^3+x^2)^2}$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	0 $+$	
f_n	0 $\nearrow$	n

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bornée et :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|f_n\| = n$
Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge.
Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3.4 Une condition suffisante de convergence normale

Le programme mentionne explicitement le résultat suivant :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels (positifs) telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ |f_n(x)| \leq \alpha_n \\ \text{La série } \displaystyle\sum_{n\geq 0} \alpha_n \text{ converge.} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ la fonction } f_n \text{ est bornée.} \\ \text{La série de fonctions } \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge normalement sur } I. \end{cases}$$

(C'est une conséquence directe de la comparaison des séries à termes positifs)

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin(25\arctan(x)) + 27\cos(n^2)}{n^3 + x^2} \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in \mathbb{R}\ |f_n(x)| \leq \dfrac{28}{n^3}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
Donc $\sum f_n$ CVN sur $\mathbb{R}$.
On voit sur cet exemple l'intérêt de la proposition précédente : on n'est pas obligé de déterminer la valeur exacte de $\|f_n\|_\infty$. Il suffit d'en trouver un majorant convenable.

3.5 Lien avec la convergence uniforme

Théorème
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
Alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.

Démonstration
Soit $x_0 \in I$ fixé.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x_0)| \leq \|f_n\|_\infty$
$\sum \|f_n\|_\infty$ converge donc $\sum f_n(x_0)$ CVA donc CV.
Donc $\sum f_n$ CVS sur I.

On peut donc définir $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n$ et il s'agit de prouver que la suite de fonctions $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ CVU vers 0 sur I.

$$\begin{aligned}
\forall x \in I\ \forall p \in \mathbb{N}\ |R_p(x)| &= \left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \\
&\leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} |f_n(x)| \quad \left(\sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \text{ CVA}\right) \\
&\leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \text{ indépendant de } x \\
&\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \text{ comme reste d'une série convergente}
\end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$ CVU vers 0 sur I.
cqfd
Remarque
La réciproque est fausse ie : la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence normale.

Exemple
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$.
On a déjà vu que $\sum f_n$ CVU sur $[1;+\infty[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[1;+\infty[} \left(\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\right) = \dfrac{1}{n}$
$\sum \|f_n\|_\infty$ diverge : il n'y a pas CVN.

3.6 Lien avec la convergence simple

La convergence normale entraîne la convergence uniforme et la convergence uniforme entraîne la convergence simple donc la convergence normale entraîne la convergence simple. Bien sûr, la réciproque est fausse.
Toutefois, on peut être plus précis :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
Alors pour tout $x \in I$ la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument.
En effet, soit $x \in I$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$
avec $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ convergente.
Donc la série $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge ie la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument.

En présence d'une série de fonctions qui converge simplement mais où à x fixé il n'y a pas convergence absolue, il est donc inutile de chercher à établir la convergence normale cf $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$

4 Continuité

4.1 Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I alors f est continue sur I.

Démonstration
Il s'agit de montrer que f est continue en tout point de I.
Soit $x_0 \in I$.
Mq : $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$
Soit $\epsilon > 0$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I donc $\sup\limits_{x\in I}(|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \forall x \in I\ |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$
On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I\ |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) - f(x_0) + f_{n_0}(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \end{aligned}$$

f_{n_0} est continue en x_0 donc :
$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \dfrac{\epsilon}{3}$
On a alors :
$\forall x \in I\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$

4.2 Caractère local de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.
Examinons les deux énoncés suivants :

i f est bornée (sur $\mathbb{R}$).

ii f est continue (sur $\mathbb{R}$).

Le premier concerne une propriété globale, le second une propriété locale (vraie en tout point mais néanmoins locale).
Exprimé différemment : si f est bornée sur tout segment de $\mathbb{R}$, f n'est pas nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$. Par contre si f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
Si on peut appliquer le théorème précédent sur tout segment de $\mathbb{R}$, on parviendra à prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$ même si il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en entier.

Plus généralement, la situation est la suivante :
On dispose d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.

• La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f de I dans $\mathbb{K}$ et on veut montrer que f est continue sur I.
Il suffit alors, si I n'est pas un segment, de prouver la convergence uniforme :
- dans le cas où $I = \mathbb{R}$:
  — sur tout segment de $\mathbb{R}$ (ie tout intervalle $[a; b]$ avec $a < b$)
  — sur tout segment de la forme $[-a; a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- dans le cas où $I = \mathbb{R}_+^*$:
  — sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ (ie tout intervalle $[a; b]$ avec $0 < a < b$)
  — sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$ avec $a > 0$

pour les cas les plus fréquents.
Je cite le programme :

> En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

4.3 Continuité de la somme d'une série de fonctions continues

4.3.1 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I alors sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

(Il suffit d'appliquer à la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ les résultats du cours sur les suites de fonctions)

4.3.2 Caractère local de la continuité

Je cite le programme :

> En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

4.3.3 Continuité de la fonction zêta de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases}]1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]1; +\infty[$.
- $\sum f_n$ CVU sur tout intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 1$.
  Soit $a > 1$.
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left\| {f_n}_{|[a;+\infty[} \right\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a;+\infty[} (|f_n(x)|) = \sup\limits_{x\in[a;+\infty[} \left(\left| \dfrac{1}{n^x} \right| \right) = \dfrac{1}{n^a}$
  $a > 1$ donc $\sum \left\| {f_n}_{|[a;+\infty[} \right\|_\infty$ converge et $\sum f_n$ CVN sur $[a; +\infty[$.
  Donc $\sum f_n$ CVU sur $[a; +\infty[$.

Donc $\zeta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur tout intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 1$.

Donc $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $]1;+\infty[$.

4.3.4 Exemple : la fonction êta de Dirichlet

Soit $\eta \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\sum f_n$ CVU sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.
  Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in [a;+\infty[$
  — $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée.
  — $\left(\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît.
  — $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  D'après le TSCSA :
  $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(n+1)^x}$
  Donc :
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [a+\infty[\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$ indépendant de x et $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Donc (R_n) CVU vers 0 sur $[a;+\infty[$.
  Donc $\sum f_n$ CVU sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.

Donc η est continue sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 1$.
Donc η est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.4 Théorème de la double limite

4.4.1 Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une borne, éventuellement infinie, de I.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose :

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I.
- $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \in \mathbb{K}$

Alors :

- La série $\sum_{n\geq 0} l_n$ converge.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

La démonstration est hors-programme.

4.4.2 Limite en $+\infty$ de la fonction zêta de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases}]1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$.

- $\sum f_n$ CVU sur $[2;+\infty[$.
- $f_1(x) = 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
- $\forall n \geq 2\ f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$
Par contre, la limite en 1 ne peut pas se traiter de cette manière.
Par comparaison d'une série à une intégrale, on a :
$\forall x > 1\ \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$
Donc : $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$

4.5 Retour sur un exemple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Domaine de définition, continuité, que suggère Maple sur la continuité en 0 ? $\lim\limits_0 f(x)$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2} \end{cases}$.
On a déjà vu que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $[a;b]$ $(0 < a < b)$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [a;b]\ \ |f_n(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{b}{1+n^2a^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente : $\dfrac{b}{1+n^2a^2} \sim \dfrac{b}{n^2a^2}$ et tout est positif
$\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
Mais on peut aussi dire, si $a > 0$:
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [a;+\infty[\ |f_n(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{x}{n^2x^2} = \dfrac{1}{n^2x} \leq \dfrac{1}{an^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente
$\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a;+\infty[$ avec $a > 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
f étant impaire, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ f_n(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$
Le tracé de la courbe montre que la limite de f n'est pas 0 en 0. Le théorème de la double limite ne s'appliquera pas. Dans ce cas, on a recours à la comparaison d'une série à une intégrale.
Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$t \mapsto \dfrac{x}{1+x^2t^2}$ est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leq \frac{x}{1+n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$
et :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leq \frac{x}{1+n^2x^2}$
Donc :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leq f(x) \leq x + \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$
$[\arctan(xt)]_0^{+\infty} \leq f(x) \leq x + [\arctan(xt)]_0^{+\infty}$
$\forall x > 0 \ \dfrac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{2} + x$
Donc $f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et par parité $f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi}{2}$.
De plus $f(0) = 0$.
f n'est pas continue en 0.

4.6 Centrale 2009

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+n\,x^2)} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sous quelles conditions $\sum f_n$ converge-t-elle simplement ?
Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$.
A quelles conditions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
Soit $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$.
En remarquant que $\phi : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t\,x^2)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ n'est pas continue en 0.

Remarque :
Cet exercice est retombé en 2017 sous la forme suivante :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.
Etudiez la continuité de S.

Correction de l'exercice de 2009
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \end{cases}$. Il n'y a pas de problème de définition de f_n.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

- **Premier cas :** $x = 0$
  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ f_n(0) = 0$
  Donc $\sum f_n(0)$ converge.
- **Deuxième cas :** $x \neq 0$
  $f_n(x) \sim \dfrac{1}{xn^{\alpha+1}}$ de signe constant.
  $\sum f_n(x)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha + 1 > 1 \Longleftrightarrow \alpha > 0$

Dans la suite on suppose $\alpha > 0$
Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}$.
(si $\alpha \leq 0$ $\sum f_n(x)$ ne converge que pour $x = 0$)

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \geq a \ \ |f_n(x)| = f_n(x) \leq \dfrac{x}{n^\alpha n x^2} \leq \dfrac{1}{a n^{\alpha+1}}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.
Les fonctions f_n sont clairement continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par parité, elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.
Pour tout $\alpha > 0$, S est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Passons à la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ f_n'(x) &= \frac{1}{n^\alpha} \frac{1 + nx^2 - x\,2nx}{(1+nx^2)^2} \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \frac{1 - nx^2}{(1+nx^2)^2}\end{aligned}$$

f_n est positive, croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}; +\infty\right[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$
$\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+ \iff \alpha > \dfrac{1}{2}$
Pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$, S est donc continue sur $\mathbb{R}$.
Remarque
On peut retrouver la convergence normale sur $[a; +\infty[$ à l'aide du tableau de variation :
Soit $a > 0$.
$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq a$
On a alors :
$\forall n \geq n_0 \ \left\| f_{n|[a;+\infty[} \right\|_\infty = f_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Dans la suite, on suppose $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$.
Soit $x > 0$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus la série de terme général $\dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ converge donc on peut faire une comparaison série intégrale standard.

Si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, on peut même faire mieux car la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$ est intégrable sur $]0;1]$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t \leq S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$$

$$2x^{2\alpha-1}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2\alpha-1}(1+u^2)} \leq S(x) \leq 2x^{2\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2\alpha-1}(1+u^2)} \qquad u = x\sqrt{t}$$

Le changement de variable $u = tx^2$ marche bien ausi.
On en déduit $S(x) \sim 2x^{2\alpha-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{2\alpha-1}(1+u^2)}$
Cela permet de montrer que S n'est pas continue en 0.

Remarque
L'examinateur a dit qu'il n'y avait pas convergence uniforme sur $[0;1]$ si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ mais n'a pas demandé de le justifier. Il a fait passer directement à la comparaison série intégrale.
On peut procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \|R_n\|_\infty &\geq R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \\
&\geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ car tout est positif} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha(1+k/n)} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \times n \times \frac{1}{(2n)^\alpha(1+(2n)/n)} \\
&\geq \frac{1}{3\times 2^\alpha}\, n^{1/2-\alpha}
\end{aligned}$$

Donc si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ la suite $(\|R_n\|_\infty)$ ne converge pas vers 0.

5 Intégration

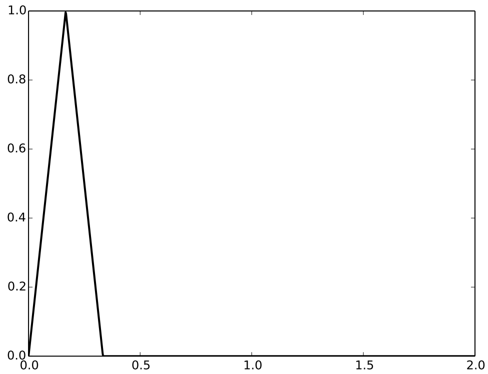
5.1 Insuffisance de la convergence simple

5.1.1 Cas des intégrales sur un segment

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$ continues.
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$ vers f continue.
La suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément convergente et même si elle l'est on n'a pas forcément :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ie } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n sur $[0;2]$: f_n est nulle en 0 et sur $[1/n;2]$, $f_n(1/(2n)) = M_n$, f_n est affine sur $[0;1/(2n)]$ et sur $[1/(2n);1/n]$.



(f_n) CVS vers 0 sur $[0;2]$.
$\displaystyle\int_0^2 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{M_n}{2n}\right)$ qui n'existe pas forcément et qui lorsqu'elle existe n'est pas forcément nulle.

5.1.2 Cas des intégrales sur un intervalle quelconque

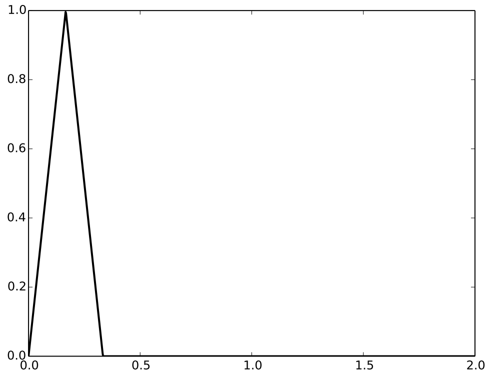
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continues et intégrables.
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f continue.
La fonction f n'est pas forcément intégrable sur I.
Exemple
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \leq n \\ x \mapsto 2 - \dfrac{x}{n} \text{ si } n < x \leq 2n \\ x \mapsto 0 \text{ si } x > 2n \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Revenons au cas général et supposons que f est intégrable sur I.
La suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément convergente et même si elle l'est on n'a pas forcément :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ie } \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n sur $[0;+\infty[$: f_n est nulle en 0 et sur $[1/n;+\infty[$, $f_n(1/(2n)) = M_n$,

f_n est affine sur $[0; 1/(2n)]$ et sur $[1/(2n); 1/n]$.



(f_n) CVS vers 0 sur $[0 + \infty[$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{M_n}{2n}\right)$ qui n'existe pas forcément et qui lorsqu'elle existe n'est pas forcément nulle.

5.2 Interversion limite-intégrale

5.2.1 Cas des intégrales sur un segment

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$ continues.
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers $f : [a; b] \to \mathbb{K}$ [1].
Alors la suite $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ie } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie car f est continue.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \ \left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f_n - f)(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sup_{x\in[a;b]} (|f_n(x) - f(x)|)\,\mathrm{d}t \\
&\leq (b-a) \sup_{x\in[a;b]} (|f_n(x) - f(x)|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple

1. d'après 4.3.6, f est continue

Exercice 1 *(X 2021)*

Soit $r \in]0;1[$.
$P_r(t) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \operatorname{e}^{int}$
Montrer que P_r converge uniformément vers une fonction positive d'intégrale égale à 1 entre 0 et 2π.
Remarque
Cet énoncé n'est pas conforme au programme.
En voici une réécriture conforme au programme :
Soit $r \in]0;1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $S_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} \operatorname{e}^{ikx} \end{cases}$.
Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction positive d'intégrale égale à 1 entre 0 et 2π.
Correction
Soit $f_0 \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} r^n \left(\operatorname{e}^{inx} + \operatorname{e}^{-inx}\right) = \dfrac{1}{\pi} r^n \cos(nx) \end{cases}$.
La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série de fonctions de terme général f_n.
$\|f_0\|_\infty = \dfrac{1}{2\pi}$
$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\pi} r^n$
$r \in]0;1[$ donc la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.
La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
On note P_r sa limite.
Les fonctions S_n étant toutes continues :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} P_r(t) &= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} \operatorname{e}^{ikx}\right) \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} r^k \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{e}^{ikx} + \operatorname{e}^{-ikx}\right) \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{n} r^k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(2\pi + 2\sum_{k=1}^{n} r^k \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ P_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} r^k \left(\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} r^k \mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} r^k \mathrm{e}^{-ikx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \mathrm{e}^{-ikx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{ix}} + \frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{-ix}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{2 - r\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right) - 1 + r\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right) - r^2}{\left(1 - r\,\mathrm{e}^{ix}\right)\left(1 - r\,\mathrm{e}^{-ix}\right)} \\
&= \frac{1 - r^2}{2\pi \left|1 - r\,\mathrm{e}^{ix}\right|^2} \geq 0
\end{aligned}$$

5.2.2 Cas des intégrales sur un intervalle quelconque

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
On suppose :

- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.
- **Hypothèse de domination**
  Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ |f_n| \leq \varphi$ ie $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I.
- f est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarques

- La démonstration est hors programme.
- Je cite le programme :

  > Pour l'application pratique du théorème de convergence dominée, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Exemples

- **Centrale 99**
  Existence et calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^\alpha + t^{2\alpha} + \cdots + t^{n\alpha}}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (1 + t^\alpha + \cdots + t^{n\alpha})^{-1} \end{cases}$.
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t > 0\ 1 + t^\alpha + \cdots + t^{n\alpha} > 0$ (somme de termes strictement positifs)
  f_n est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
  — **Premier cas :** $\alpha < 0$
  $\forall \beta < 0\ t^\beta \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

Donc :
$f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$
Donc $f_n(t) \sim_{t\to+\infty} 1$ et f_n n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme f_n est positive, il ne peut y avoir semi-convergence.
La question est sans objet.

— **Deuxième cas :** $\alpha = 0$
$f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{n+1}$
Comme dans le premier cas, la question est sans objet.

— **Troisième cas :** $\alpha > 0$
$f_n(t) \sim_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^{n\alpha}}$
$n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ n\alpha > 1$
Pour tout $n \geq n_0$, f_n est intégrable sur $[1;+\infty[$.
De plus f_n est prolongeable par continuité en 0 : $f_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$
Pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Etudions maintenant la convergence simple.
On fixe $t > 0$.

— **Premier cas :** $t = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n(t) = f_n(1) = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

— **Deuxième cas :** $t \neq 1$
$t^\alpha \neq 1$ donc :
$$f_n(t) = \frac{1-t^\alpha}{1-(t^\alpha)^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1-t^\alpha \text{ si } t<1 \\ 0 \text{ si } t>1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1-t^\alpha \text{ si } t \in]0;1] \\ t \mapsto 0 \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Enfin, l'hypothèse de domination est vérifiée :
$\forall n \geq n_0\ \forall t > 0\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^{k\alpha} \geq \sum_{k=0}^{n_0} t^{k\alpha}$
Donc :
$\forall t > 0\ \forall n \geq n_0\ |f_n(t)| \leq |f_{n_0}(t)| = \varphi(t)$
avec φ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc, d'après le théorème de convergence dominée :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha+t^{2\alpha}+\cdots+t^{n\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^\alpha)\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = ?$

Le théorème de convergence dominée s'applique aussi sur un segment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \end{cases}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$.

— La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction $\begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in]0;1] \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0;1]$.

— **Hypothèse de domination**
$\forall (x,n) \in [0;1] \times \mathbb{N}\ |f_n(x)| = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \leq 1$ avec $x \mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0;1]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

- **Centrale 2018**
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$. On suppose que $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n f(t) \text{ si } t < n \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \end{cases}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et pas seulement continue par morceaux)

— **Convergence simple**
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0\ t < n$
$\forall n \geq n_0\ f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)\right) f(t)$
Classiquement $f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-t} f(t)$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} f(t)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— **Hypothèse de domination**
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $t < n$, $|f_n(t)| = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)\right) |f(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} |f(t)|$ (on utilise l'inégalité classique : $\forall x \in]-1;+\infty[\ \ln(1+x) \leq x$)
Si $t \geq n$, $|f_n(t)| = 0 \leq \mathrm{e}^{-t} |f(t)|$
Donc :
$\forall (t,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} |f(t)|$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} |f(t)|$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On conclut avec le théorème de convergence dominée.

- **Centrale**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée. Calculer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} n f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$

Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas directement.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto n f(t)\,\mathrm{e}^{-nt} \end{cases}$.
Je laisse tomber $f_0 = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

f est bornée donc $f_n(t) = O_{+\infty}\left(e^{-nt}\right)$ et n étant strictement positif, $t \mapsto e^{-nt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $t = \dfrac{x}{n}$.
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} nf(t)\, e^{-nt}\, dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\, dx$
et on est amené à introduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right) e^{-x} \end{cases}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
— La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t \mapsto e^{-x} f(0)$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$
— L'hypothèse de domination est vérifiée :
  f étant bornée :
  $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ |f(t)| \leq M$
  On a alors :
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |g_n(t)| \leq M\, e^{-x}$
  avec $x \mapsto M\, e^{-x}$ continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} nf(t)\, e^{-nt}\, dt = \int_0^{+\infty} f(0)\, e^{-x}\, dx = f(0)$$

5.3 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

5.3.1 Cas des intégrales sur un segment

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$.
Si la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a; b]$ alors :

- La série à termes dans $\mathbb{K}$: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(t)\, dt$ converge.
- $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt$

  (La première intégrale est bien définie car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a; b]$ d'après le paragraphe sur la continuité)

Démonstration
Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a; b]$.
- (S_n) CVU vers S sur $[a; b]$.

D'après 5.2 :
$\displaystyle\int_a^b S_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b S(t)\, dt$ (S étant bien continue sur $[a; b]$)
En d'autres termes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b S(t)\, dt$

Donc la série de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples

- **Exercice 2** *(CCP 2019)*
  Soit $f_n : x \mapsto nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}$.
  1. Soient a et b tels que $0 < a < b$.
     Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; b]$.
  2. Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x > 0$.

  Correction

  1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a; b]\ \ |f_n(x)| = f_n(x) \leq nb\,\mathrm{e}^{-na^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
  2. D'après ce qui précède, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

  $$\begin{aligned}\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-na^2} - \mathrm{e}^{-nb^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-na^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nb^2} \\ &\quad \text{les deux séries géométriques étant bien convergentes} \\ &= \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-a^2})} - \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-b^2})}\end{aligned}$$

     Cette formule étant valable pour $0 < a < b$.
     Le cas $a = b$ est trivial et le cas $b < a$ s'en déduit facilement.
     On a donc :
     $\forall x > 0\ \displaystyle\int_1^x S(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-1})} - \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-x^2})}$
     On en déduit :

  $$\forall x > 0\ S(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-x^2}}{(1-\mathrm{e}^{-x^2})^2}$$

- **Exercice 3** *(Mines 2016)*
  $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}$
  1. Domaine de définition ?
  2. Mode de convergence ?
  3. Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

- A l'aide de $f_n \begin{cases}[0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n(1-x)^n\end{cases}$ calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

On commence par calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Une intégration par parties donne :
$I_n = \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}(1-t)^n\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t^{n+1}}{n+1} n(-1)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$
On réitère :
$I_n = \dfrac{n}{n+1}\,\dfrac{n-1}{n+2}\displaystyle\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t$
et on arrive à
$I_n = \dfrac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Un raisonnement rigoureux consisterait à montrer par récurrence sur $k \in [\![0;n]\!]$:
$I_n = \dfrac{n!}{(n-k)!}\;\dfrac{n!}{(n+k)!}\displaystyle\int_0^1 t^{n+k}(1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$
En remarquant $f_n = f_1^n$ et en étudiant les variations de f_1, on montre $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{4^n}$.
En effet :
$\forall t \in [0;1]\ f_1'(t) = 1-t-t = 1-2t$
Donc f_1 est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ de 0 à $\dfrac{1}{4}$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ de $\dfrac{1}{4}$ à 0.
La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, f_n est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ de 0 à $\dfrac{1}{4^n}$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ de $\dfrac{1}{4^n}$ à 0.
$\sum f_n$ converge normalement sur $[0;1]$ et toutes les f_n sont continues donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4}\\
&= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1\\
&= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}$$

5.3.2 Cas des intégrales sur un intervalle quelconque

Théorème dit théorème N1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux et intégrables sur I.
On suppose :
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.
- $\boxed{\text{La série (de nombres réels positifs) } \displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_I |f_n| \text{ converge}}$

Alors :
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I.

- $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Remarques

- La démonstration est hors programme.
- L'hypothèse "$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge" est *fondamentale*, en particulier on ne peut pas la remplacer par "$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge" ou même par "$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge absolument".

Exemples

- **Mines 2005**

  Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

  Soit $f \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x\ln x}{1-x^2} \end{cases}$

  $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$

  $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} -\dfrac{1}{2}$

  En effet, en posant $h = 1-x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1-h) = \frac{(1-h)\ln(1-h)}{1-(1-h)^2} = \frac{(1-h)\ln(1-h)}{2h-h^2} \\ &\sim \frac{-h}{2h} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

  f est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe.

  $\displaystyle\forall x \in]0;1[\ \frac{x\ln x}{1-x^2} = x\ \ln(x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}\ln(x)$

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{2n+1}\ln(x) \end{cases}$.

  En regardant ce qui se passe en $x=1$, on voit qu'on ne peut pas prolonger f_n par continuité sur $[0;1]$ et invoquer la convergence uniforme.

  — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $]0;1[$ (car prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$)

  — La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0;1[$.

  — La somme f de cette série de fonctions est continue.

  — La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

  Comme toutes les f_n sont négatives, cela revient à déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

  Une IPP facile à justifier donne :

$$\int_0^1 x^{2n+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\ln(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4(n+1)^2}$$

Donc le théorème N1 s'applique et :

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{24}$$

- **Mines 2007**
  $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2\ \mathrm{d}x$
  - Existence ?
  - Montrer que $x \mapsto \left(\dfrac{x}{\sinh x}\right)^2$ est $\mathcal{C}^\infty$.
  - Calcul de I.
  - Questions de cours sur les DLs et les DSEs.

  Correction
  - Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \left(\dfrac{x}{\sinh(x)}\right)^2\end{cases}$.

    f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 1$: f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

    $f(x) = \left(\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \sim_{+\infty} \dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^{2x}} = 4x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$

    $x^2 f(x) \sim_{+\infty} 4x^4\,\mathrm{e}^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

    Classiquement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
  - $\forall x > 0\ \dfrac{\sinh(x)}{x} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

    La somme de la série vaut 1 en $x = 0$.

    Soit $g\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{x} \text{ si } x>0\\ 0 \mapsto 1\end{cases}$.

    $\forall x \in \mathbb{R}_+\ g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

    Donc g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

    Donc $f = \dfrac{1}{g^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \dfrac{x}{\sinh(x)} = \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{2x\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$

    $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) = 4x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-2x}}\right)^2$

    $\forall t \in]-1;1[\ \left(\dfrac{1}{1-t}\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}$: on dérive $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

    $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) = 4x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^{-2(n-1)x} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} nx^2\,\mathrm{e}^{-2nx}$

    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n\begin{cases}\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 4nx^2\,\mathrm{e}^{-2nx}\end{cases}$.
    - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$f_n(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} 0$ et $x^2 f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

— La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
— La somme f de cette série de fonctions est continue.
— La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x$ converge.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-2nx} \, \mathrm{d}x &= \left[x^2 \frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{-2n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-2nx} \, \mathrm{d}x \text{ (IPP à justifier)} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x \, \mathrm{e}^{-2nx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\left(\left[x\frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{-2n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nx} \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2n^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nx} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4n^3}
\end{aligned}$$

$\forall n \geq 1 \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$
Finalement, d'après le théorème N1 :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6 Dérivation

6.1 Insuffisance de la convergence simple et de la convergence uniforme

- Une limite simple de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[0;1]$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$) et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$ sur $[0;1]$ mais f n'est pas dérivable sur $[0;1]$.

- Une limite uniforme de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}} \end{cases}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[0;1]$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$) et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ sur $[0;1]$ mais f n'est

pas dérivable sur $[0;1]$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \ |f_n(x) - \sqrt{x}| &= \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{x+1/n-x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1/n}} \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{x}+\sqrt{x+1/n})}\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \sqrt{x} + \sqrt{x+\dfrac{1}{n}} \geq \sqrt{\dfrac{1}{n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1/n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1/n}} = \sqrt{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [0;1] \ |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ indépendant de x et $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc (f_n) CVU vers la fonction racine carrée sur $[0;1]$.

- Mais même si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est dérivable sur I et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f dérivable sur I, la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas forcément simplement sur I vers f'.
  ie : on ne peut pas intervertir les symboles $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

  Exemple

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^n}{n} \end{cases}$.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

  $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  Donc (f_n) CVU vers $f = 0$ sur $[0;1]$.

  (f_n') CVS sur $[0;1]$ vers $g \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$.

  $g \neq f'$

- Le même phénomène se produit pour les séries de fonctions.

6.2 Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions : une condition suffisante

Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

i Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

ii La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f de I dans $\mathbb{K}$.

iii La suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction h de I dans $\mathbb{K}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Démonstration

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' est continue sur I.

- (f_n') CVU sur I vers h.

Donc h est continue sur I.
Fixons $a \in I$.
On peut définir $g \begin{cases} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t + f(a) \end{cases}$.
g est $\mathcal{C}^1$ sur I et $g' = h$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ f_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(a)$ car f_n est $\mathcal{C}^1$
Fixons $x \in I$.

- (f_n') CVU vers h sur $[a;x]$ (théoriquement il faudrait distinguer trois cas)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' est continue sur $[a;x]$.

Donc :
$\displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$
De plus $f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$ (CVS)
D'où :
$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t + f(a) = g(x)$
Donc (f_n) CVS sur I vers g.
Par unicité de la limite simple, $f = g$.
Donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = g' = h$.
Remarque
L'hypothèse la plus contraignante porte sur les dérivées. Il s'agit en fait d'un théorème d'intégration.

6.3 Caractère local de la dérivabilité

Comme pour la continuité, en pratique on vérifie la convergence uniforme (de la suite des dérivées) sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

6.4 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$

Théorème
Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

i Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

ii Pour tout $j \in [\![0;k-1]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction h_j de I dans $\mathbb{K}$.

iii La suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction h_k de I dans $\mathbb{K}$.

Alors $f = h_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :
$\forall j \in [\![0;k]\!]\ f^{(j)} = h_j$
ou encore :
$$\forall j \in [\![0;k]\!]\ \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} f_n(x)\right)$$

Démonstration
Le théorème se démontre par récurrence sur k.
Pour $k = 1$, il est vrai : cf 6.1.

On suppose le théorème vrai au rang k.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

i Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I.

ii Pour tout $j \in [\![0;k]\!]$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction h_j de I dans $\mathbb{K}$.

iii La suite de fonctions $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction h_{k+1} de I dans $\mathbb{K}$.

D'après 6.1 appliqué à $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, h_k est $\mathcal{C}^1$ sur I et $h_k' = h_{k+1}$.

Soit $[a;b]$ un segment de I.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a;b]\ \left|f_n^{(k)}(x) - h_k(x)\right| &= \left|f_n^{(k)}(a) + \int_0^x f_n^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t - h_k(a) - \int_a^x h_k'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|f_n^{(k)}(a) - h_k(a) + \int_a^x \left(f_n^{(k+1)}(t) - h_{k+1}(t)\right)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|f_n^{(k)}(a) - h_k(a)\right| + \int_a^x \left|f_n^{(k+1)}(t) - h_{k+1}(t)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left|f_n^{(k)}(a) - h_k(a)\right| + |x-a| \sup_{t\in[a;b]}\left(\left|f_n^{(k+1)}(t) - h_{k+1}(t)\right|\right) \\
&\leq \left|f_n^{(k)}(a) - h_k(a)\right| + (b-a) \sup_{t\in I}\left(\left|f_n^{(k+1)}(t) - h_{k+1}(t)\right|\right) \\
&\quad \text{indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers h_k sur $[a;b]$.
Donc $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ CVU vers h_k sur tout segment de I.

D'après l'hypothèse de récurrence, f est $\mathcal{C}^k$ sur tout segment de I donc sur I et :
$\forall j \in [\![0;k]\!]\ f^{(j)} = h_j$

En particulier, $f^{(k)} = h_k$ est $\mathcal{C}^1$ donc f est $\mathcal{C}^{k+1}$ et $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)' = h_k' = h_{k+1}$.

Le théorème est vrai au rang $k+1$.

Remarque
En pratique on vérifie la convergence uniforme (de la suite des dérivées k-ièmes) sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

6.5 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

Théorème
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose :

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} Df_n$$

Démonstration
Soient $S_p = \sum_{n=0}^{p} f_n$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et $\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, S_p est $\mathcal{C}^1$ sur I.
- (S_p) CVS sur I vers S.
- $(S'_p) = \left(\sum_{n=0}^{p} f'_n\right)$ CVU sur I vers Σ.

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = \Sigma$ ie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Remarque
En pratique on vérifie la convergence uniforme (de la série des dérivées) sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

6.6 Exemple : la fonction êta de Dirichlet

Soit $\eta \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)} \end{cases}$.

- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x > 0\ f'_n(x) = (-1)^n \ln(n)\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)} = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n^x}$
- La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0;+\infty[$.
  On montre d'abord la convergence simple et on s'intéresse ensuite au reste.
  On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  — $\sum f'_n(x)$ est alternée.
  — $f'_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  — $(|f'_n(x)|) = \left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)$ décroît APCR :
  $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\ln(t)}{t^x}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln(t)t^{-x}) = t^{-x-1} - x\ln(t)t^{-x-1} = \dfrac{x}{t^{x+1}}\left(\dfrac{1}{x} - \ln(t)\right) \leq 0$ pour $t \geq \mathrm{e}^{1/x}$
  Donc $\sum f'_n(x)$ converge.
  Donc $\sum f'_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut définir $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f'_n(x)$.

On montre ensuite que (R_p) CVU vers 0 sur tout segment de $]0;+\infty[$.
Soit $[a,b]$ $(0<a<b)$ un tel segment.
$\forall x\in[a;b]$ $\mathrm{e}^{1/x}\leq \mathrm{e}^{1/a}$
Si on pose $n_0=\lfloor \mathrm{e}^{1/a}\rfloor+1$ on a :
$\forall x\in[a;b]$ $\left(\dfrac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n\geq n_0}$ décroît
Donc :
$\forall p\geq n_0$ $\forall x\in[a;b]$ $|R_p(x)|\leq|f_{p+1}(x)|=\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}\leq\dfrac{\ln(p+1)}{(p+1)^a}$ indépendant de x et $\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.
Donc (R_p) CVU vers 0 sur tout segment de $]0;+\infty[$.
On a bien prouvé que $\sum f_n'$ CVU sur tout segment de $]0;+\infty[$.

Donc η est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x>0\ \eta'(x)=\sum_{\substack{n=1\\ \text{ou } 2}}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}$$

6.7 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k\in\mathbb{N}^*$

Théorème

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

i Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

ii Pour tout $j\in[\![0;k-1]\!]$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq0}f_n^{(j)}$ converge simplement sur I.

iii La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq0}f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.

Alors $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$\forall j\in[\![0;k]\!]$ $S^{(j)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(j)}$

ou encore :

$\forall j\in[\![0;k]\!]$ $\dfrac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}f_n(x)\right)$

Démonstration

On note $S_n=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}f_p$.

On a :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, S_n est $\mathcal{C}^k$ sur I.
- $\forall j\in[\![0;k-1]\!]$ $(S_n^{(j)})=\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n}f_p^{(j)}\right)$ CVS sur I vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(j)}$.
- $(S_n^{(k)})=\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{n}f_p^{(k)}\right)$ CVU sur I vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(k)}$.

Donc S est $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$\forall j\in[\![0;k]\!]$ $S^{(j)}=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(S_n^{(j)}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(j)}$

6.8 Exemple : la fonction dzeta de Riemann

Soit $\zeta\begin{cases}]1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\end{cases}$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$: ζ est $\mathcal{C}^k$ sur $]1;+\infty[$ et :

$\forall x>1\ \zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \text{ou } 2}}^{+\infty}\frac{(\ln(n))^k}{n^x}$

D'après le paragraphe 4.3.3, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ soit $f_n\begin{cases}]1;+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\dfrac{(\ln(n))^k}{n^x}=(\ln(n))^k\ \mathrm{e}^{-x\ln(n)}\end{cases}$.

- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n$ converge simplement sur $]1;+\infty[$ et sa somme est la fonction $(-1)^k\zeta^{(k)}$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall x>1\ f_n'(x)=-(\ln(n))^{k+1}\,\mathrm{e}^{-x\ln(n)}=-\dfrac{(\ln(n))^{k+1}}{n^x}$
- $\sum f_n'$ CVU sur tout segment de $]1;+\infty[$:
  Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $]1;+\infty[$ $(1<a<b)$.
  $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \left\|f'_{n_{|[a;b]}}\right\|_\infty=\displaystyle\sup_{x\in[a;b]}(|f_n'(x)|)=\sup_{x\in[a;b]}\left(\frac{(\ln(n))^{k+1}}{n^x}\right)=\frac{(\ln(n))^{k+1}}{n^a}$
  $n^{(1+a)/2}\times\dfrac{(\ln(n))^k}{n^a}=\dfrac{(\ln(n))^k}{n^{(a-1)/2}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ car $a>1$
  Donc $\dfrac{(\ln(n))^k}{n^a}=o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{(1+a)/2}}\right)$ avec $\dfrac{1+a}{2}>1$
  Donc la série de terme général $\left\|f'_{n_{|[a;b]}}\right\|_\infty$ converge.

On en déduit que la fonction $(-1)^k\zeta^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$\forall x>1\ \left((-1)^k\zeta^{(k)}\right)'(x)=-\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \text{ou } 2}}^{+\infty}\frac{(\ln(n))^{k+1}}{n^x}$

On en déduit que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

On en déduit que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et :

$\forall k\in\mathbb{N}\ \forall x>1\ \zeta^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{(\ln(n))^k}{n^x}=(-1)^k\sum_{\substack{n=1\\ \text{ou } 2}}^{+\infty}\frac{(\ln(n))^k}{n^x}$

En particulier :

$\forall x>1\ \zeta'(x)=-\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^x}<0$ (chaque terme est >0)

ζ est strictement décroissante sur $]1+\infty[$.

Cela peut être prouvé plus élémentairement :

Soient x_1 et $x_2\in]1+\infty[$ tq $x_1<x_2$.

$\forall n\geq 2\ \dfrac{1}{n^{x_1}}>\dfrac{1}{n^{x_2}}$ (il y a égalité pour $n=1$)

D'où en sommant : $\zeta(x_1) > \zeta(x_2)$
Faire le graphe.