ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 3
Suites et séries de fonctions

941

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n\,x}{1+n^3\,x^2} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)\cos^n(x) \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha\,x\,\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{4-(\ln x)^{2n}}{3+(\ln x)^{2n}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto -1 \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $[0;1]$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice 5 *(Mines 2023, 2024)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_0 = 0$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0;1]\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right)$
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 *(Centrale MP 2016)*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1;+\infty[,\mathbb{R})$.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n \begin{cases} [1;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{n}{x}\left(f\left(x+\dfrac{x}{n}\right) - f(x)\right) \end{cases}$.

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. On se place dans des cas particuliers.
   (a) Si $f = \ln$, montrer qu'il y a convergence uniforme.
   (b) Si $f = \sin$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que la fonction $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n).
   (b) On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$?

2 Modes de convergence d'une série de fonctions

Exercice 7 *(Mines 2012)*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $U_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n(1-t)^a \end{cases}$.
Etudier la convergence simple sur $[0;1]$ de la série de fonctions de terme général U_n.
Etudier sa convergence normale.
Etudier sa convergence uniforme.
Etudier la convergence normale sur $[0;b]$ avec $0 < b < 1$.
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0;1])$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n f(t) \end{cases}$.
Etudier la convergence normale sur $[0;1]$ de la série de fonctions de terme général V_n.

Exercice 8 *(Mines 2024)*

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^n(x)\cos^\alpha(x) \end{cases}$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I.
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

3 Continuité

Exercice 9 *(Centrale 2022)*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha x \,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S_α.
2. Pour $\alpha < 2$, montrer que S_α est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $\alpha \geq 2$, S_α est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 10 *(Mines 2017)*

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x^2 n^2}\right)$ avec $a > 0$.

1. Domaine de définition ?
2. Continuité.
3. Equivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 11 *(CCP 2017)*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. (Indication : distinguer le cas où θ est un multiple de 2π)
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n.$$
3. Discuter en fonction de θ la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$.
4. Montrer que $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$.

4 Intégration

Exercice 12 *(CCP 2022)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$ et $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\cdots+x^n} \end{cases}$.

1. Calculer pour tout $x \in [0;1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
   En déduire l'existence de u_n.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left[(1-x)\ln\left(1-x^{n+1}\right)\right]$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1-x^{n+1}\right)\mathrm{d}x$
4. (a) Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}}\,\mathrm{d}u$
   (b) En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{K}{n^2}$.
5. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$.

Exercice 13 *(Mines 2019)*

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 14 *(X 2018)*

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Limite de $I_n = n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15 *(Centrale 2022)*

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_{1/n}^{4/n}\left(1+\sin\left(\frac{u}{n}\right)\right)^n \exp\left(\sqrt{\frac{n^2u}{n+1}}\right)\mathrm{d}u\right)$.

Exercice 16 *(Mines 2019)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = n\displaystyle\int_1^{1+1/n} f(x^n)\,\mathrm{d}x$.
Etudier la suite (u_n).
Variante 2023
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ continue.
Donner un équivalent de $A_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 *(Centrale 2018, 2024)*

Soit $\alpha > 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \, \mathrm{d}t$$

1. Existence de I_n.
2. Relation entre I_{n+1} et I_n.
3. Limite de I_n ?
4. Equivalent de I_n ?

Variante

Exercice 18 *(Mines 2021)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \, \mathrm{d}t$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle définie à partir d'un certain rang ?
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
4. Equivalent de u_n ?

Exercice 19 *(Mines 2016)*

Limite de $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$?

Exercice 20 *(Mines PSI 2013)*

1. Comparer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 21 *(Mines 2018)*

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Exercice 22 *(Mines 2018)*

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$.

Exercice 23 *(X 2021, 50 minutes de passage)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Nature de la série $\sum u_n$?
3. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ en fonction de u_1.

Exercice 24 *(Centrale 2015, planche complète)*

$I_n = \displaystyle\int_0^1 t^{nt}\,\mathrm{d}t$

1. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Ecrire I_n sous forme de somme.

Exercice 25 *(Mines 2022)*

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2 + x^2}$$

Exercice 26 *(Mines 2013)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est bien définie. Déterminer la limite de (I_n).
2. Nature de la série de terme général I_n ?

Exercice 27 *(Centrale 2023)*

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{x^3} \end{cases}$$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est intégrable sur $[1; +\infty[$ et donner $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

5 Dérivation

Exercice 28 *(Centrale 2019)*

Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On admet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
   Donner un équivalent de φ en 0^+.
   Quelle est la limite de φ en $+\infty$?

Exercice 29 *(Centrale 2019)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(x+n)^2} \end{cases}$.

Soit $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 30 *(Mines 2018)*

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue.
2. Montrer que f est dérivable et croissante.
3. Limite de f et de f' en $+\infty$.

Exercice 31 *(Mines 2019)*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-kx}\right)$$

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Limite de f en $+\infty$?
4. $f\left(\mathcal{D}_f\right)$?

Exercice 32 *(Mines 2018)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ comme somme d'une série convergente.