

**ANALYSE 1**  
**TD**  
**2025-2026**  
**Chapitre 3**  
**Suites et séries de fonctions**

941

## 1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

### Exercice 1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx}{1+n^3x^2} \end{cases}$ .

1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}_+$  ?
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  ?

### Correction

1. Si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$   
 Si  $x > 0$ ,  $f_n(x) \sim \frac{nx}{n^3x^2} = \frac{1}{n^2x} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$   
 La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

2.  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$   
 $f_n$  croît sur  $\left[0; \frac{1}{n^{3/2}}\right]$  de 0 à  $\frac{1}{2\sqrt{n}}$  puis décroît de  $\frac{1}{2\sqrt{n}}$  à 0.  
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n}}$   
 La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Exercice 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \cos^n(x) \end{cases}$ .

1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle simplement sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ?
2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ?

### Correction

1. Si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Si  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $0 \leq \cos(x) < 1$  donc  $\cos^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

2.  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = \cos^{n-1}(x) ((n+1) \cos^2(x) - n)$

On pose  $x_n = \arccos\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$ .

$f_n$  croît sur  $[0; x_n]$  puis décroît.

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $\sin(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq \cos^n(x_n) \leq 1$

Donc  $f_n(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

### Exercice 3

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}$ .

1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle simplement sur  $\mathbb{R}_+$  ?

2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  ?

### Correction

1. Si  $x = 0$ ,  $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Si  $x > 0$ ,  $x e^{-nx} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

2.  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$

$f_n$  croît sur  $\left[0; \frac{1}{n}\right]$  de 0 à  $\frac{n^{\alpha-1}}{e}$  puis décroît de  $\frac{n^{\alpha-1}}{e}$  à 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \|f_n\|_\infty = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$

• **Premier cas :  $\alpha < 1$**

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+$ .

• **Deuxième cas :  $\alpha \geq 1$**

Il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ , ni sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Exercice 4

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{4 - (\ln x)^{2n}}{3 + (\ln x)^{2n}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto -1 \end{cases}$ .

1. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle simplement sur  $[0; 1]$  ?

2. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; 1]$  ?

### Correction

1. • **Premier cas :**  $x = 0$

$$f_n(0) = -1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$$

- **Deuxième cas :**  $0 < x < \frac{1}{e}$

$$\ln(x) < -1 \text{ donc } (\ln(x))^{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$$

- **Troisième cas :**  $x = \frac{1}{e}$

$$f_n(0) = \frac{3}{4} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{3}{4}$$

- **Quatrième cas :**  $x > \frac{1}{e}$

$$-1 < \ln(x) < 0 \text{ donc } (\ln(x))^{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{4}{3}$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0; 1]$  vers  $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -1 \text{ si } x < \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e} \mapsto \frac{3}{4} \\ x \mapsto \frac{4}{3} \text{ si } x > \frac{1}{e} \end{cases}$ .

2. On peut parler de continuité : il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0; 1]$ .

Pour être plus complet, on introduit  $g \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{4-t}{3+t} \end{cases}$  de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in ]0; 1] \ f_n(x) = g((\ln(x))^{2n})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ g'(t) = \frac{-7}{(3+t)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in ]0; 1] \ f'_n(x) = \frac{-7}{(3 + (\ln(x))^{2n})^2} \times 2n \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^{2n-1} \text{ du signe de } \ln(x) \text{ car } 2n-1 \text{ est impair.}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in ]0; 1[ \ f'_n(x) < 0$$

Donc  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ .

Sur  $[a; b]$  avec  $0 \leq a < b < \frac{1}{e}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) + 1| = f_n(b) + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ (car } f_n + 1 \text{ croît}$$

de  $f_n(a) + 1 \geq 0$  à  $f_n(b) + 1)$

Par contre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sup_{x \in [0; 1/e]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0; 1/e]} |f_n(x) - f(x)| = 1 + \frac{3}{4}$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur  $\left[0; \frac{1}{e}\right]$  ou  $\left[0; \frac{1}{e}\right[$

Sur  $[a; b]$  avec  $\frac{1}{e} < a < b \leq 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a; b]} \left| f_n(x) - \frac{4}{3} \right| = \left| f_n(a) - \frac{4}{3} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ (car } f_n - \frac{4}{3}$$

croît de  $f_n(a) - \frac{4}{3} \leq 0$  à  $f_n(b) - \frac{4}{3} \leq 0)$

Par contre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x \in [1/e; 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1/e; 1]} |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{3}{4} - \frac{4}{3} \right|$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur  $\left[ \frac{1}{e}; 1 \right]$  ou  $\left[ \frac{1}{e}; 1 \right]$

### Exercice 5 (Mines 2023, 2024)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; 1] f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2} (x - f_n(x))^2$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Correction

On fixe  $a \in [0; 1]$  et on s'intéresse à la suite (de nombres) récurrente définie par  $u_0 = 0$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g : x \mapsto x + \frac{1}{2}(a - x^2)$$

$g$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R} g'(x) = 1 - x$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de  $g$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} g(x) - x = \frac{1}{2}(a - x^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)$$

En particulier  $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ .

Avec le tableau de variations, on en déduit que l'intervalle  $[0; \sqrt{a}]$  est stable par  $g$ . Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n \in [0; \sqrt{a}]$$

Avec le signe de  $g(x) - x$ , on montre alors que la suite  $(u_n)$  est croissante.

$(u_n)$  est croissante et majorée donc  $(u_n)$  converge.  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , la limite de la suite  $(u_n)$  est un point fixe de  $g$  compris entre 0 et  $\sqrt{a}$ . Cela ne peut être que  $\sqrt{a}$ .

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge donc simplement sur  $[0; 1]$  vers la fonction  $\sqrt{\cdot}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= u_n - \sqrt{a} + \frac{a - u_n^2}{2} \\ &= (u_n - \sqrt{a}) \left( 1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n \leq \sqrt{a}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq 1 - \sqrt{a} \leq 1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} \right) |u_n - \sqrt{a}|$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} |u_n - \sqrt{a}| \leq \sqrt{a} \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n$$

Soit  $\epsilon > 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; \epsilon^2] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \leq \epsilon$$

$$\left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in [\epsilon^2; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in [0; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers la fonction racine carrée.

### Exercice 6 (Centrale MP 2016)

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$ .

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on définit } f_n \begin{cases} [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{n}{x} \left( f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right) \end{cases}.$$

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
2. On se place dans des cas particuliers.
  - (a) Si  $f = \ln$ , montrer qu'il y a convergence uniforme.
  - (b) Si  $f = \sin$ , montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que la fonction  $x \mapsto xf''(x)$  est bornée.  
Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
- (b) On suppose que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}$  et que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de  $f'$  en  $+\infty$  ?

#### Correction

1. On fixe  $x \in [1; +\infty[$ .

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ donc } \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^0, t \neq 0]{} f'(x)$$

$$\frac{x}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ donc } f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'(x)$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[1; +\infty[$  vers la fonction  $f'$ .

2. (a)

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}^* |f_n(x) - f'(x)| &= \left| \frac{n}{x} \left( \ln \left( x + \frac{x}{n} \right) - \ln(x) \right) - \frac{1}{x} \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq n \left| \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \text{ indépendant de } x \end{aligned}$$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2} \text{ donc } n \left| \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $[1; +\infty[$ .

- (b)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f'(x)| &\geq |f_n(n\pi) - f'(n\pi)| \\ &\geq \left| \frac{1}{\pi} (\sin((n+1)\pi) - \sin(n\pi)) - \cos(n\pi) \right| = 1 \end{aligned}$$

Donc la suite  $\left( \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f'(x)| \right)$  ne converge pas vers 0.

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f'$  sur  $[1; +\infty[$ .

3. (a)

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ |f_n(x) - f'(x)| &= \left| \frac{n}{x} \left( f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right) - f'(x) \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \frac{x}{n} f'(x) \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \left(x + \frac{x}{n} - x\right) f'(x) \right| \\ &\leq \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \sup_{x \leq t \leq x + \frac{x}{n}} (|f''(t)|) \end{aligned}$$

Or la fonction  $x \mapsto xf''(x)$  est bornée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \geq 1 \ x |f''(x)| \leq M$$

On en déduit :

$$\forall x \geq 1 \ |f''(x)| \leq \frac{M}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ |f_n(x) - f'(x)| &\leq \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \sup_{x \leq t \leq x + \frac{x}{n}} \left( \frac{M}{t} \right) = \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \frac{M}{x} \\ &\leq \frac{M}{2n} \text{ indépendant de } x \text{ et converge vers } 0 \end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $[1; +\infty[$ .

(b) On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\forall x \geq 1 \ f_n(x) = n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \frac{f\left(x + \frac{x}{n}\right)}{x \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} - n \frac{f(x)}{x}$$

On en déduit :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} n \left( 1 + \frac{1}{n} \right) l - nl = l$$

De plus, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f'$  sur  $[1; +\infty[$ .

D'après le théorème de la double limite,  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ .

## 2 Modes de convergence d'une série de fonctions

**Exercice 7** (Mines 2012)

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $U_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n(1-t)^a \end{cases}$ .

Etudier la convergence simple sur  $[0; 1]$  de la série de fonctions de terme général  $U_n$ .

Etudier sa convergence normale.

Etudier sa convergence uniforme.

Etudier la convergence normale sur  $[0; b]$  avec  $0 < b < 1$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty([0; 1])$  vérifiant  $f(1) = f'(1) = 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $V_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n f(t) \end{cases}$ .

Etudier la convergence normale sur  $[0; 1]$  de la série de fonctions de terme général  $V_n$ .

### Correction

- **Convergence simple**

Soit  $t \in [0; 1]$  fixé.

Si  $t \in [0; 1[$  alors la série géométrique  $\sum t^n$  converge donc la série  $\sum U_n(t)$  converge.

Si  $t = 1$  alors  $U_n(t) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et la série  $\sum U_n(t)$  converge.

La série de fonctions  $\sum U_n$  converge donc simplement sur  $[0; 1]$ .

- **Convergence normale**

$\forall n \in \mathbb{N} \forall t \in [0; 1[ U'_n(t) = t^{n-1}(1-t)^{a-1} (n - (a+n)t)$

$a > 0$  donc  $\frac{n}{a+n} \in ]0; 1[$ .

$U_n$  croît sur  $\left[0; \frac{n}{a+n}\right]$  de 0 à  $U_n\left(\frac{n}{a+n}\right)$  puis décroît de  $U_n\left(\frac{n}{a+n}\right)$  à 0.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \|U_n\|_\infty &= \left(\frac{n}{a+n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{a+n}\right)^a \\ &= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n} \left(\frac{a}{a+n}\right)^a \\ &\sim \frac{K}{n^a} \end{aligned}$$

$\sum U_n$  converge normalement sur  $[0; 1] \iff a > 1$

- **Convergence uniforme**

La somme de la série de fonctions est  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (1-t)^{a-1} \text{ si } t < 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t = 1 \end{cases}$ .

Elle n'est pas continue si  $a \leq 1$ .

Donc si  $a \leq 1$ , la série de fonctions  $\sum U_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0; 1]$ .

Par contre si  $a > 1$ , elle converge uniformément car elle converge normalement.

Donc :

$\sum U_n$  converge uniformément sur  $[0; 1] \iff a > 1$

On peut aussi traiter cette question sans avoir recours au théorème de continuité :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in [0; 1[ R_n(t) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k (1-t)^a \\ &= (1-t)^a \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = (1-t)^a \frac{t^{n+1}}{1-t} \\ &= (1-t)^{a-1} t^{n+1} = U_{n+1}(t) \text{ avec } a-1 \text{ à la place de } a \end{aligned}$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(1) = 0$$

$$\text{Si } a > 1, \quad \|R_n\|_{\infty} = U_{n+1} \left( \frac{n+1}{a-1+n+1} \right) \sim \frac{K}{n^{a-1}}$$

$$\text{On en déduit que } \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc uniformément vers 0 sur  $[0; 1]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum U_n$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

Bien sûr, dans le cas  $a > 1$ , on peut se contenter de dire que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Par contre, si  $0 < a \leq 1$ ,  $R_n$  est positive et croissante sur  $[0; 1[$  et  $R_n(1) = 0$  donc :

$$\|R_n\|_{\infty} = \lim_{t \rightarrow 1^-} R_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

La suite  $(\|R_n\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers 0 sur  $[0; 1]$ .

On en déduit que la série de fonctions  $\sum U_n$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0; 1]$ .

- **Convergence normale sur  $[0; b]$  avec  $0 < b < 1$**

$$\frac{n}{a+n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad \frac{n}{a+n} \geq b$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_0 \quad \sup_{t \in [0; b]} |U_n(t)| = U_n(b) \text{ terme général d'une série convergente.}$$

On en déduit qu'il y a convergence normale sur  $[0; b]$  pour tout  $b \in ]0; 1[$ .

On peut également raisonner comme suit :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; b] \quad |U_n(t)| = t^n(1-t)^a \leq b^n$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions  $\sum U_n$  converge normalement sur  $[0; b]$ .

- **Séries de fonctions de terme général  $V_n$**

Par Taylor-Young :

$$f(t) = \frac{f''(t)}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2)$$

$$\text{Donc } \frac{f(t)}{(1-t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \frac{f''(1)}{2}$$

$$\text{La fonction } g \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(t)}{(1-t)^2} \text{ si } t < 1 \\ 1 \mapsto \frac{f''(1)}{2} \end{cases} \text{ est continue.}$$

$$\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = (t-1)^2 g(t)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; 1] \quad V_n(t) = g(t) U_n(t) \text{ avec } a = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|V_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty} \times \|U_n\|_{\infty}$$

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} V_n$  converge normalement sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 8 (Mines 2024)**

On fixe  $\alpha > 0$  et on pose  $I = \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^n(x) \cos^\alpha(x) \end{cases}$

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ .
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur  $I$  ?
3. Converge-t-elle uniformément sur  $I$  ?

### Correction

1. **Convergence simple sur  $I$  :**

Pour tout  $x \in I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on distingue deux cas :

- Si  $x = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\cos(x) = 0$ , donc  $f_n(x) = 0$  pour tout  $n$ . La série converge trivialement et sa somme est nulle.
- Si  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , alors  $\sin(x) \in [0, 1[$ . La série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est une série géométrique de raison  $\sin(x) \in [0, 1[$ , donc convergente. Sa somme vaut :

$$S(x) = \frac{\cos^\alpha(x)}{1 - \sin(x)}.$$

Ainsi, la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ .

2. **Convergence normale sur  $I$  :**

On étudie  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ , où  $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ .

#### Calcul de la dérivée de $f_n$

Pour calculer  $f'_n$ , nous utilisons la règle de dérivation d'un produit :

$$f'_n(x) = \frac{d}{dx} [\sin^n(x)] \cdot \cos^\alpha(x) + \sin^n(x) \cdot \frac{d}{dx} [\cos^\alpha(x)]$$

#### Dérivée des composantes

- (a) Dérivée de  $\sin^n(x)$  (en utilisant la dérivation des fonctions composées) :

$$\frac{d}{dx} [\sin^n(x)] = n \sin^{n-1}(x) \cos(x)$$

- (b) Dérivée de  $\cos^\alpha(x)$ , pour  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  :

$$\frac{d}{dx} [\cos^\alpha(x)] = \alpha \cos^{\alpha-1}(x) (-\sin(x)) = -\alpha \cos^{\alpha-1}(x) \sin(x)$$

#### Expression complète de la dérivée

En substituant ces résultats :

$$f'_n(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos(x) \cdot \cos^\alpha(x) + \sin^n(x) \cdot (-\alpha \cos^{\alpha-1}(x) \sin(x))$$

Ce qui se simplifie en :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'_n(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha+1}(x) - \alpha \sin^{n+1}(x) \cos^{\alpha-1}(x)$$

#### Forme factorisée

On peut factoriser l'expression par  $\sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x)$  :

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x) [n \cos^2(x) - \alpha \sin^2(x)]$$

## Conclusion

La dérivée de  $f_n$  est donc donnée par :

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x) \left( n \cos^2(x) - \alpha \sin^2(x) \right)$$

Il est facile de trouver son signe et de dresser le tableau de variations de  $f_n$ .

Pour  $n \geq 1$ , le maximum de  $f_n$  est atteint en  $x_n = \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{\alpha}}\right)$ , et on a, puisque  $f_n$  est positive :

$$\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n/2} \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^{\alpha/2} \sim e^{-\alpha/2} \alpha^{\alpha/2} n^{-\alpha/2}.$$

En effet :

$$\cos^2(x_n) = \frac{1}{1 + \tan^2(x_n)} = \frac{1}{1 + \frac{n}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha + n}$$

On en déduit :

$$\sin^2(x_n) = \tan^2(x_n) \cos^2(x_n) = \frac{n}{\alpha + n}$$

$$\text{Classiquement } \left(\frac{n}{\alpha + n}\right)^{n/2} = \exp\left(-\frac{n}{2} \ln\left(\frac{n+\alpha}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha/2}$$

La série  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

**Conclusion :** La série converge normalement sur  $I$  si et seulement si  $\alpha > 2$ .

### 3. Convergence uniforme sur $I$ :

$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  et si on pose  $t = \frac{\pi}{2} - x$  :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\cos^\alpha(x)}{1 - \sin(x)} = \frac{\sin^\alpha(t)}{1 - \cos(t)} \sim \frac{2t^\alpha}{t^2} \\ &\sim 2t^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Donc si  $\alpha \leq 2$ ,  $S$  n'est pas continue en 1 et il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur  $I$ .

Par contre si  $\alpha > 2$ , il y a convergence uniforme sur  $I$  car il y a convergence normale sur  $I$ .

Examinons la solution de Deepseek.

On étudie le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ .

Pour  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a :

$$R_n(x) = \frac{\cos^\alpha(x) \sin^{n+1}(x)}{1 - \sin(x)}.$$

En posant  $y = \sin(x)$ , on étudie  $g_n(y) = (1+y)^{\alpha/2} (1-y)^{\alpha/2-1} y^{n+1}$ .

**Calcul de la dérivée de  $g_n(y)$**

Soit la fonction :

$$g_n(y) = (1+y)^{\alpha/2} (1-y)^{\alpha/2-1} y^{n+1}$$

avec  $y \in [0, 1[$ ,  $\alpha > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Dérivation logarithmique**

Pour simplifier le calcul, nous utilisons la méthode de dérivation logarithmique.

(a) Prenons le logarithme naturel :

$$\ln g_n(y) = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y) + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \ln(1-y) + (n+1) \ln y$$

(b) Dérivons chaque terme :

$$\frac{g'_n(y)}{g_n(y)} = \frac{\alpha}{2(1+y)} - \frac{\alpha/2 - 1}{1-y} + \frac{n+1}{y}$$

(c) Multiplions par  $g_n(y)$  pour obtenir  $g'_n(y)$  :

$$g'_n(y) = g_n(y) \left[ \frac{\alpha}{2(1+y)} - \frac{\alpha-2}{2(1-y)} + \frac{n+1}{y} \right]$$

### Expression développée

En substituant  $g_n(y)$  et en mettant au même dénominateur :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2} (1-y)^{\alpha/2-1} y^{n+1} \left[ \frac{\alpha y(1-y) - (\alpha-2)y(1+y) + 2(n+1)(1-y^2)}{2y(1-y^2)} \right]$$

### Simplification du numérateur

Développons le numérateur :

$$\begin{aligned} N &= \alpha y(1-y) - (\alpha-2)y(1+y) + 2(n+1)(1-y^2) \\ &= \alpha y - \alpha y^2 - \alpha y - \alpha y^2 + 2y + 2y^2 + 2(n+1) - 2(n+1)y^2 \\ &= (-2\alpha y^2 + 2y^2 - 2(n+1)y^2) + (\alpha y - \alpha y + 2y) + 2(n+1) \\ &= [-2(\alpha+n)y^2] + 2y + 2(n+1) \end{aligned}$$

### Expression finale

La dérivée s'écrit donc :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2-1} (1-y)^{\alpha/2-2} y^n \left[ -(\alpha+n)y^2 + y + (n+1) \right]$$

### Conclusion

La dérivée de  $g_n$  est donnée par :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2-1} (1-y)^{\alpha/2-2} y^n \left[ (n+1) + y - (\alpha+n)y^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que } \|g_n\|_\infty &= g_n \left( \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 4(\alpha+1)n + 4\alpha+1}}{2(\alpha+n)} \right) \\ y_n &\approx 1 - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

### Développement asymptotique

Posons  $y = 1 - \frac{t}{n}$  avec  $t = \mathcal{O}(1)$ . On a :

$$\begin{aligned}
 (1+y)^{\alpha/2} &\approx 2^{\alpha/2} \\
 (1-y)^{\alpha/2-1} &= \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha/2-1} \\
 y^{n+1} &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \approx e^{-t}
 \end{aligned}$$

### Comportement au voisinage du maximum

En substituant dans  $g_n(y)$  :

$$g_n(y) \approx 2^{\alpha/2} \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-t}$$

Au point critique  $t \approx \alpha + \frac{1}{2}$ , on obtient :

$$g_n(y_n) \sim 2^{\alpha/2} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-\alpha - \frac{1}{2}}$$

**Équivalent final** On en déduit l'équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\boxed{g_n(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{\alpha/2} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-\alpha - \frac{1}{2}}}$$

Pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\sup_{y \in [0,1]} g_n(y) \sim C \cdot n^{-\alpha/2+1}$ .

**Conclusion :** La série converge uniformément sur  $I$  si et seulement si  $\alpha > 1$ . C'est une erreur très surprenante. La CNS est  $1 - \frac{\alpha}{2} < 0$  soit  $\alpha > 2$ .

## 3 Continuité

### Exercice 9 (Centrale 2022)

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , soit  $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$ .

1. Déterminer le domaine de définition de  $S_\alpha$ .
2. Pour  $\alpha < 2$ , montrer que  $S_\alpha$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Pour  $\alpha \geq 2$ ,  $S_\alpha$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}_+$  ?

### Correction

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1} \end{cases}$  (qui est définie sur  $\mathbb{R}$ ).

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé.

- **Premier cas :**  $x < 0$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$  diverge grossièrement.

- **Deuxième cas :  $x = 0$**

Tous les termes de la série sont nuls donc  $S_\alpha(0)$  est défini et vaut 0.

- **Troisième cas :  $x > 0$**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* f_n(x) > 0$$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha e^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général  $f_n(x)$  converge.

Le domaine de définition de  $S_\alpha$  est donc  $\mathbb{R}_+$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = \frac{n^\alpha}{n^2 + 1} (e^{-nx} - nx e^{-nx}) = \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2 + 1} (1 - nx)$$

La fonction  $f_n$  croît de 0 à  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha+1} e^{-1}}{n^2 + 1}$  puis décroît de  $\frac{n^{\alpha-1} e^{-1}}{n^2 + 1}$  à 0.

$$\text{Donc } \|f_n\|_\infty = \frac{n^{\alpha-1} e^{-1}}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{e n^{3-\alpha}}$$

Si  $\alpha < 2$  alors  $3 - \alpha > 1$  et il y a convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$ .

Les fonctions  $f_n$  étant toutes continues sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $S_\alpha$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

3. On fixe  $x > 0$ .

La fonction  $\phi_x : t \mapsto \frac{x t^\alpha e^{-tx}}{t^2 + 1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \phi'_x(t) &= x \frac{(\alpha t^{\alpha-1} - x t^\alpha) e^{-tx} (t^2 + 1) - 2t^{\alpha+1} e^{-tx}}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x e^{-tx}}{(t^2 + 1)^2} (\alpha t^{\alpha+1} + \alpha t^{\alpha-1} - x t^{\alpha+2} - x t^\alpha - 2t^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

La fonction  $\phi_x$  n'est décroissante qu'à partir d'un certain rang, qui dépend de  $x$ .

L'utilisation de la comparaison série intégrale me paraît difficile.

Soit  $\alpha \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* S_\alpha\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=n}^{2n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \text{ car tout est positif} \\ &\geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{k^\alpha}{k^2 + 1} \frac{1}{n} e^{-k/n} \\ &\geq (n+1) \frac{n^\alpha}{(2n)^2 + 1} \frac{1}{n} e^{-2} \sim \frac{n^{\alpha-2}}{4e^2} \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $\left(S_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas vers 0.

La fonction  $S_\alpha$  n'est pas continue en 0.

**Exercice 10 (Mines 2017)**

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right)$  avec  $a > 0$ .

1. Domaine de définition ?
2. Continuité.
3. Équivalent en 0 et en  $+\infty$ .

### Correction

1.  $f$  n'est clairement pas définie en 0.

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right)$  est bien défini.

$\ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2 n^2}$  et tout est positif donc la série de terme général  $\frac{a}{x^2 n^2}$  converge.

Le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}^*$ .  $f$  est paire.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \end{cases}$ .

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

• La série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  :  
Soit  $[\alpha; \beta]$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) un segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [\alpha; \beta] \left| \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \right| = \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{a}{\alpha^2 n^2} \right)$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[\alpha; \beta]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[\alpha; \beta]$ .

La fonction  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par parité,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

3. • En  $0^+$ .

On va utiliser une comparaison série intégrale.

On fixe  $x > 0$  et on définit  $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) \end{cases}$ .

$\varphi$  est continue, décroissante et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$\varphi(t) \sim_0 -2 \ln(t)$

En effet  $\varphi(t) = \ln(x^2 t^2 + a) - 2 \ln(x) - 2 \ln(t) = -2 \ln(t) + \ln(a) - 2 \ln(x) + o(1)$ .

$\varphi(t) \sim_{+\infty} \frac{a}{x^2 t^2}$

On a donc :

$$\int_1^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) dt$$

On fait le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  strictement croissant  $s = xt$  :

$$\frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) ds \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) ds$$

On procède à une IPP :

$u'(s) = 1$ ,  $u(s) = s$

$$v(s) = \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right)$$
,  $v'(s) = \frac{-2a}{s^3} \frac{1}{1 + a/s^2}$

$u$  et  $v$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$u(s)v(s) = s \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) = s \ln(s^2 + a) - 2s \ln(s) \xrightarrow[s \rightarrow 0^+]{} 0$$

$$u(s)v(s) \sim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{a}{s^2} = \frac{a}{s} \xrightarrow[s \rightarrow +\infty]{} 0$$

L'intégration par parties est donc justifiée et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) ds &= \int_0^{+\infty} s \frac{-2a}{s^3} \frac{1}{1 + a/s^2} ds \\ &= 2a \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a} = 2a \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{a}} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi \sqrt{a} \end{aligned}$$

De plus  $\int_x^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) ds \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{s^2} \right) ds$  donc :

$$f(x) \sim_0 \frac{\pi \sqrt{a}}{x}$$

- En  $+\infty$ .

— **Première méthode**

En appliquant la formule de Taylor avec reste-intégral, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ln(1+t) = t + \int_0^t \frac{(t-s)^1}{1!} \frac{-1}{(1+s)^2} ds$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ |\ln(1+t) - t| \leq \int_0^t (t-s) ds = \left[ -\frac{(t-s)^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \geq \sqrt{a} \left| f(x) - \frac{a}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) - \frac{a}{x^2 n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \ln \left( 1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) - \frac{a}{x^2 n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ma^2}{x^4 n^4} = \frac{1}{x^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ma^2}{n^4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) - \frac{a}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Donc :

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{a\pi^2}{6x^2}$$

— **Deuxième méthode**

$$\forall x > 0 x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 \ln \left( 1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \ln \left( 1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right) \end{cases}$$

$$\text{— Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{a}{n^2}$$

— La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g_n(x)| = x^2 \ln \left( 1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right) \leq x^2 \times \frac{a}{n^2 x^2} \text{ par concavité de } \ln.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g_n(x)| \leq \frac{a}{n^2} \text{ indépendant de } x \text{ et terme général d'une série convergente.}$$

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} g_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

D'après le théorème de la double limite  $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} \neq 0$ .

On en déduit :

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2}$$

### Exercice 11 (CCP 2017)

- Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ . (Indication : distinguer le cas où  $\theta$  est un multiple de  $2\pi$ )
- Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de nombres complexes. On pose pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n.$$

- Discuter en fonction de  $\theta$  la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ .
- Montrer que  $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$  est continue sur  $]0, 2\pi[$ .

### Correction

$$1. \quad \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n = n \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n \left( e^{i\theta} \right)^k = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \text{ sinon car } e^{i\theta} \neq 1.$$

2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=1}^n a_k S_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n \text{ car } S_0 = 0 \end{aligned}$$

On peut également raisonner par récurrence.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n$

Pour  $n = 1$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_1 b_1$  et  $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n = a_1 S_1 = a_1 b_1$  donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

On suppose  $\mathcal{P}(n)$  vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + (a_n - a_{n+1}) S_n + a_{n+1} S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} (S_n + b_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_{n+1} \end{aligned}$$

3. La série diverge si  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ , converge sinon.

En effet si  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$  c'est la série harmonique  $\sum \frac{1}{k}$ .

Par contre, si on suppose  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$  :

on pose  $S_k(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$  et on a par application de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k(\theta) + \frac{S_n(\theta)}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} + \frac{S_n(\theta)}{n}$$

Il résulte du calcul de la première question, qu'à  $\theta$  fixé, la suite  $(S_n(\theta))$  est bornée.

Donc  $\frac{S_n(\theta)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

De plus  $\frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} = O_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k^2} \right)$  donc la série de terme général  $\frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$  converge absolument donc converge.

On en déduit que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$  converge avec  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$

$$4. \forall \theta \in ]0; 2\pi[ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_k \begin{cases} ]0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} \end{cases}$ .

• Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k$  est continue sur  $]0; 2\pi[$ .

• Pour tout  $\epsilon \in ]0; \pi[$  la série de fonctions  $\sum f_k$  converge uniformément sur  $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$  :

$$\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \forall k \in \mathbb{N}^* |S_k(\theta)| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)} \leq \frac{1}{\sin(\epsilon/2)}$$

Donc :

$\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \ \forall k \in \mathbb{N}^* \ |f_k(\theta)| \leq \frac{1}{k^2 \sin(\epsilon/2)}$  indépendant de  $\theta$  et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions  $\sum f_k$  converge normalement sur  $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum f_k$  converge uniformément sur  $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$ .

La fonction  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$  est donc continue sur tout segment  $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$  avec  $\epsilon \in ]0; \pi[$ . Elle est donc continue sur  $]0; 2\pi[$ .

La fonction  $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$  est donc continue sur  $]0; 2\pi[$ .

### Remarque

On peut aussi écrire :

$$\forall \theta \in ]0; 2\pi[ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \frac{1}{\sin(\theta/2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} \sin(n\theta/2)}{k(k+1)}$$

et la série de fonctions converge normalement sur  $\mathbb{R}$  en entier.

Il n'y a plus qu'à prendre la partie imaginaire pour prouver que la fonction  $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$  est continue sur  $]0, 2\pi[$ .

## 4 Intégration

### Exercice 12 (CCP 2022)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u_n = \int_0^1 x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx$  et  $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\dots+x^n} \end{cases} .$

1. Calculer pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

En déduire l'existence de  $u_n$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x) \ln(1-x^{n+1})]$ .

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

4. (a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du$$

- (b) En déduire qu'il existe  $K > 0$  tel que  $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^2}$ .

5. (a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx$  converge.

- (b) Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

### Correction

1. Il y a une formule dans le cours pour cette somme mais peut-être fallait-il la redémontrer ?

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; 1] (1-x) \sum_{k=0}^n x^k &= \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) \\ &= 1 - x^{n+1} \text{ par simplification en cascade}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in [0; 1[ \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

La fonction  $g_n \begin{cases} [0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \end{cases}$  est continue.

$$\forall x \in [0; 1[ g_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n} \xrightarrow[x \rightarrow 1]{x < 1} \frac{1}{n+1}$$

Donc  $g_n$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[0; 1]$ .

Donc  $g_n$  est intégrable sur  $[0; 1[$  et  $u_n$  est bien définie.

2. On pose  $x = 1 - h$ .

$$\begin{aligned}(1-x) \ln(1-x^{n+1}) &= h \ln(1-(1-h)^{n+1}) = h \ln(1-(1-(n+1)h+o(h))) \\ &= h \ln((n+1)h+o(h)) = h(\ln(h) + \ln(n+1+o(1))) \\ &= h \ln(h) + h \ln(n+1+o(1))\end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x) \ln(1-x^{n+1})] = 0$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$u(x) = 1 - x, u'(x) = -1$$

$$v'(x) = \frac{x^n}{1-x^{n+1}}, v(x) = -\frac{1}{n+1} \ln(1-x^{n+1})$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1[$  et  $u(x)v(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{x < 1} 0$  : l'intégration par parties est justifiée.

Comme  $v(0) = 0$ , on peut écrire directement :

$$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

4. (a) On fait le changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$  (sur  $]0; 1[$ ) strictement croissant  $x = u^{1/(n+1)}$ .

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} u_n &= -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-u) \frac{1}{n+1} u^{1/(n+1)-1} du \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{1-1/(n+1)}} du \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du\end{aligned}$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $h_n \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} = \ln(1-u) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \ln(u)\right) \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n$  est continue sur  $]0; 1[$ .

- La suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $]0; 1[$  vers  $h \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u} \end{cases}$

- La fonction  $h$  est continue sur  $]0; 1[$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leq 1$$

On multiplie par  $-\ln(u) \geq 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in ]0; 1[ \quad -\frac{n}{n+1} \ln(u) \leq -\ln(u)$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in ]0; 1[ \quad |h_n(u)| = -h_n(u) \leq \frac{-\ln(1-u)}{u} = -h(u)$$

avec  $-h$  continue, positive et intégrable sur  $]0; 1[$  :

$$-h(u) \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{u > 0} 1 \text{ et } \sqrt{1-u} \xrightarrow[u \rightarrow 1^-]{u < 1} 0$$

D'après le théorème de convergence dominée,  $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$ .

Mais la fonction  $h$  est continue, négative et non constante nulle donc  $I < 0$ .

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} \text{ donc } u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^2} \text{ avec } K = -I > 0.$$

$$5. (a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx \leq \int_0^1 x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx = u_n$$

D'après la question précédente, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx$  converge.

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad \sum_{k=0}^n x^k \geq (n+1)x^n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in ]0; 1] \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)x^n} = \frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Cette inégalité est triviale pour  $x = 0$  et il y a égalité pour  $x = 1$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}.$$

$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $[0; 1]$ .

### Exercice 13 (Mines 2019)

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}}$ .

#### Correction

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}} \end{cases}$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \leq 1 \\ x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

En effet si  $x < 1$  :

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(x^n + o(x^n))\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$\text{Si } x = 1, \sqrt[n]{1+x^n} = \sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{\ln(2)}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Si  $x > 1$  :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1+x^n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right)\right) \\ &= x \exp\left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Donc  $\sqrt[n]{1+x^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$ .

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}} = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

### Exercice 14 (X 2018)

Soit  $f$  une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Limite de  $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) dt$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### Correction

Il n'y a pas de problème de définition de l'intégrale : fonction continue sur une segment.

On fait le changement de variable  $t = x^{1/n}$  ou  $x = t^n$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n &= n \int_0^1 x f(x^{1/n}) \frac{1}{n} x^{1/n-1} dx \\ &= \int_0^1 x^{1/n} f(x^{1/n}) dx \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{1/n} f(x^{1/n}) \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue (par morceaux) sur  $[0; 1]$ .

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[0; 1]$  vers  $g \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(1) \text{ si } x \in ]0; 1] \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$ .

- La fonction  $g$  est continue par morceaux sur  $[0; 1]$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée.

$f$  est continue sur le segment  $[0; 1]$  donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq M$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; 1] \quad |f_n(x)| \leq M$$

avec  $x \mapsto M$  continue, positive et intégrable sur  $[0; 1]$ .

D'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 g(x) dx = f(1).$$

### Exercice 15 (Centrale 2022)

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \int_{1/n}^{4/n} \left( 1 + \sin \left( \frac{u}{n} \right) \right)^n \exp \left( \sqrt{\frac{n^2 u}{n+1}} \right) du \right)$ .

#### Correction

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $u_n = n \int_{1/n}^{4/n} \left( 1 + \sin \left( \frac{u}{n} \right) \right)^n \exp \left( \sqrt{\frac{n^2 u}{n+1}} \right) du$ .

L'intégrale ne pose aucun problème de définition : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

On fait le changement de variable  $t = nu$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_1^4 \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right)^n \exp \left( \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) dt.$$

Le candidat a traité la suite de l'exercice avec le théorème de convergence dominée. L'examineur lui a demandé ensuite d'utiliser la convergence uniforme.

Le début est le même pour les deux méthodes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} [1; 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right)^n \exp \left( \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $[1; 4]$ .

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $[1; 4]$  vers la fonction  $f \begin{cases} [1; 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\sqrt{t}} \end{cases}$  :

Soit  $t \in [1; 4]$ .

$$1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) > 0$$

$$\forall n \geq n_0 \quad f_n(t) = \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right)$$

On en déduit quand  $n$  tend vers  $+\infty$  :

$$f_n(t) = \exp \left( n \left( \frac{t}{n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) + \sqrt{t} + o(1) \right)$$

et on conclut facilement.

- **Utilisation du théorème de convergence dominée**

— La fonction  $f$  est continue sur  $[1; 4]$ .

— **Domination**

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ 0 \leq \frac{t}{n^2} \leq \frac{4}{2^2} \leq 1 \leq \pi$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \geq 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ |f_n(t)| = f_n(t) = \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right)$$

Par concavité de  $\ln$  :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ |f_n(t)| \leq \exp \left( n \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) + \sqrt{t} \right)$$

Par concavité de  $\sin$  sur  $[0; \pi]$  :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ |f_n(t)| \leq \exp \left( n \left( \frac{t}{n^2} \right) + 2 \right) = \exp \left( \frac{t}{n} + 2 \right) \leq e^4$$

avec  $t \mapsto e^4$  continue, positive et intégrable sur  $[1; 4]$ .

- **Utilisation de la convergence uniforme**

Il s'agit de montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[1; 4]$ .

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ 0 \leq \frac{t}{n^2} \leq \frac{4}{2^2} \leq 1 \leq \pi$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \geq 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \ |f_n(t) - f(t)| = \left| \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) - \exp \left( \sqrt{t} \right) \right|$$

On en déduit pour tout  $n \geq 2$  et tout  $t \in [1; 4]$  :

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \left| \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) - \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{t} \right) \right| \\ &\quad + \left| \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) + \sqrt{t} \right) - \exp \left( \sqrt{t} \right) \right| \\ &\leq \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) \right) \left| \exp \left( \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) - \exp \left( \sqrt{t} \right) \right| \\ &\quad + \exp \left( \sqrt{t} \right) \left| \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) \right) - 1 \right| \\ &\leq \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) \right) \left| \exp \left( \sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) - \exp \left( \sqrt{t} \right) \right| \\ &\quad + \exp \left( \sqrt{t} \right) \left( \exp \left( n \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{t}{n^2} \right) \right) \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit par concavité de  $\ln$  :

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left( \exp\left(n \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit par concavité de  $\sin$  sur  $[0; \pi]$  :

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left( \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) - 1 \right) \\ &\leq \exp\left(\frac{t}{n}\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| + \exp(\sqrt{t}) \left( \exp\left(\frac{t}{n}\right) - 1 \right) \\ &\leq e^2 \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| + e^2 \left( \exp\left(\frac{4}{n}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall (x, y) \in [0; 2]^2 \quad |e^x - e^y| \leq e^2 |x - y|$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t) - f(t)| &\leq e^4 \left( \left| \sqrt{\frac{nt}{n+1}} - \sqrt{t} \right| + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq e^4 \left( \left| \frac{\frac{nt}{n+1} - t}{\sqrt{\frac{nt}{n+1}} + \sqrt{t}} \right| + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq e^4 \left( \frac{t}{(n+1) \left( \sqrt{\frac{nt}{n+1}} + \sqrt{t} \right)} + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq 4e^4 \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{8e^4}{n} \text{ indépendant de } n \text{ et } \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Quelque soit la méthode, on trouve que  $(u_n)$  converge vers  $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$  qu'il n'y a plus qu'à calculer.

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt &= \int_1^2 e^x 2x dx \text{ changement de variable } t = x^2 \\ &= 2 \left( [x e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) \\ &= 2 \left( 2e^2 - e - (e^2 - e) \right) \\ &= 2e^2 \end{aligned}$$

**Exercice 16** (*Mines 2019*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $u_n = n \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx$ .

Etudier la suite  $(u_n)$ .

**Variante 2023**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  continue.

Donner un équivalent de  $A_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n) dt$ .

**Correction**

La suite ne pose pas de problème de définition : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

On fait le changement de variable  $x = y^{1/n}$ .

$$u_n = \int_1^{b_n} f(y) y^{1/n-1} dy \text{ avec } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$b_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e \text{ car } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \frac{1}{n} = 1 \text{ donc } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$\forall n \geq 1 \ln(b_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$  : faire l'étude de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x) - x$  pour justifier l'inégalité stricte

$\forall n \in \mathbb{N}^* b_n < e$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(y) y^{1/n-1} \text{ si } y \leq b_n \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > b_n \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $[1; +\infty[$ .

- Soit  $y < e$

$$b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e \text{ donc } y < b_n \text{ APCR.}$$

$$\text{Donc } f_n(y) = f(y) y^{1/n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{f(y)}{y}$$

Soit  $y \geq e$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* b_n < y$$

$$\text{Donc } f_n(y) = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Finalement, la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers  $g \begin{cases} [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{f(y)}{y} \text{ si } y < e \\ y \mapsto 0 \text{ si } y \geq e \end{cases}$ .

- $g$  est continue par morceaux sur  $[1; +\infty[$ .

**Hypothèse de domination**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Si  $y \leq b_n$  :

$$|f_n(y)| = |f(y)| y^{1/n-1} \text{ avec } y \geq 1 \text{ et } \frac{1}{n} - 1 \leq 0 \text{ donc :}$$

$$|f_n(y)| \leq |f(y)|$$

Si  $y > b_n$  :

$$|f_n(y)| = 0 \leq |f(y)|$$

On peut donc dominer par :

$$\varphi \begin{cases} [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto |f(y)| \text{ si } y < e \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > e \end{cases} .$$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_1^e \frac{f(y)}{y} dy$$

### Exercice 17 (Centrale 2018, 2024)

Soit  $\alpha > 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt$$

1. Existence de  $I_n$ .
2. Relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .
3. Limite de  $I_n$  ?
4. Équivalent de  $I_n$  ?

#### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \end{cases} .$ 
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}}$  avec  $n\alpha > 1$   
Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. On procède à une intégration par parties.  
 $u(t) = (t^\alpha + 1)^{-n}$ ,  $u'(t) = -n\alpha t^{\alpha-1}(t^\alpha + 1)^{-n-1}$   
 $v'(t) = 1$ ,  $v(t) = t$   
 $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 $u(t)v(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} t^{1-n\alpha}$  avec  $1 - n\alpha < 1 - n \leq 0$  donc  $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$   
 Donc l'intégration par parties est justifiée.  
 De plus  $u(0)v(0) = 0$  donc :  
 $\forall n \in \mathbb{N}^* I_n = \int_0^{+\infty} t(-n)\alpha t^{\alpha-1}(t^\alpha + 1)^{-n-1} dt = n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(t^\alpha + 1)^{n+1}} dt = n\alpha(I_n - I_{n+1})$   
 D'où :  

$$\forall n \in \mathbb{N}^* I_{n+1} = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} I_n$$
3. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}_+$ .  
  - La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \end{cases} .$
  - $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ |f_n(t)| = \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \leq \frac{1}{t^\alpha + 1} = f_1(t)$$

avec  $f_1$  continue, positive et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après le théorème de convergence dominée,  $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$

- **Première méthode** : on utilise la deuxième question.

$$\begin{aligned} \ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) = -\frac{1}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \ln(I_n) - \ln(I_1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(I_{k+1}) - \ln(I_k)) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + l_1 + o(1) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \ln(n) + l_2 + o(1) \text{ mais il faut détailler et parler de la constante d'Euler} \\ \ln(I_n) &= \ln\left(n^{-1/\alpha}\right) + l_3 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_n \sim \frac{C}{n^{1/\alpha}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}_+^*$$

- **Deuxième méthode** : on utilise un changement de variable.

Des considérations habituelles ou du calcul précédent, il ressort qu'il est opportun de faire le changement de variable :  $x = n^{1/\alpha}t$ .

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha/n + 1)^n} dx \\ &= \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)\right) dx \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée.

Il ressort du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+ \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^n \geq 1 + x^\alpha$$

$$I_n \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$$

### Variante

#### Exercice 18 (Mines 2021)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On pose :  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt$

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la suite  $(u_n)$  est-elle définie à partir d'un certain rang ?
2. Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?
4. Équivalent de  $u_n$  ?

### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}}$

Si  $\alpha \leq 0$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\alpha \leq 0 \leq 1$$

donc  $f_n$  n'est jamais intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

$f_n$  étant positive,  $I_n$  ne peut pas être une intégrale semi-convergente.

$I_n$  n'est définie pour aucun  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $\alpha > 0$  alors à partir d'un certain rang  $n\alpha > 1$  et  $f_n$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Par ailleurs,  $f_n$  est intégrable sur  $]0; 1]$  car  $f_n$  est prolongeable par continuité en 0 (en posant  $f(0) = 1$ )

Les nombres  $\alpha$  cherchés sont donc les réels strictement positifs.

2. Soit  $\alpha > 0$ .

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0\alpha > 1$ .

- Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $f_n$  est continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}_+$ .

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq n_0}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \end{cases}$ .

- $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(t)| = \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \leq \frac{1}{(t^\alpha + 1)^{n_0}} = f_{n_0}(t)$$

avec  $f_{n_0}$  continue, positive et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après le théorème de convergence dominée,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$

3. Soit  $\alpha > 0$ .

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0\alpha > 1$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n = \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0}} \frac{1}{1-1/(1+t^\alpha)} = \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha}$$

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^\alpha}$$

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n_0\alpha}} \text{ avec } n_0\alpha > 1$$

Donc :

$t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  si et seulement si  $\alpha < 1$

- **Premier cas :  $\alpha < 1$**

$$\begin{aligned} \forall N \geq n_0 \quad \sum_{n=n_0}^N u_n &= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=n_0}^N \left( \frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n \right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\sum u_n$  est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée donc elle converge.

- **Deuxième cas :  $\alpha \geq 1$**

On suppose que la série de terme général  $u_n$  converge.

— Pour tout  $n \geq n_0$ ,  $f_n$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

— La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

—  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$  est continue (par morceaux) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

— La série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = u_n$  converge.

D'après le théorème  $N_1$ ,  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  : c'est absurde donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

4. On fait le changement de variable :  $x = n^{1/\alpha} t$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha/n + 1)^n} dx \\ &= \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)\right) dx \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée.

Il ressort du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^n \geq 1 + x^\alpha$$

$$u_n \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$$

ce qui permet de retrouver le résultat de la question précédente.

**Exercice 19 (Mines 2016)**

Limite de  $\int_0^n \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$  ?

**Correction**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leq n \\ x \mapsto 0 & \text{sinon} \end{cases} .$

• Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

•  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases} .$

En effet, soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  fixé.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  tq  $\forall n \geq n_0 \quad x < n$ .

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad f_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n \left(-\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

- **Domination**

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [0; n] \quad 0 \leq f_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\
 &\leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} - x\right) \text{ inégalité classique : } \forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t \\
 &\leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(\frac{x}{n^2}\right) \leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(\frac{n}{n^2}\right) \\
 &\leq \frac{e}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

C'est trivial pour  $x \geq n$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq \frac{e}{1+x^2}$$

avec  $x \mapsto \frac{e}{1+x^2}$  continue, positive et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^n \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 20** (Mines PSI 2013)

1. Comparer  $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ .
2. Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ .

**Correction**

1. Soit  $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \end{cases}$ .  
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus  $t^{3/2}f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $t^{1/2}f(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{1/2}(\ln t)^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ .

Classiquement, on ne déduit que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt &= \int_{+\infty}^1 \frac{(-\ln x)^2}{1+1/x^2} \frac{-dx}{x^2} \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \searrow \searrow t = \frac{1}{x} \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 dx}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

2. On a donc  $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^n t^{2n} (\ln t)^2 \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $]0; 1[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $]0; 1[$  :

$t^{1/2}f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  et  $f_n$  est prolongeable par continuité en 1

- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $]0; 1[$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \end{cases}$  est continue.

- La série de terme général  $\int_0^1 |f_n(t)| dt$  converge :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 |f_n(t)| dt &= \int_0^1 t^{2n} (\ln t)^2 dt \\
 &= \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (\ln t)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{2 \ln t}{t} dt \text{ IPP facile à justifier} \\
 &= -\frac{2}{2n+1} \int_0^1 t^{2n} \ln t dt \\
 &= -\frac{2}{2n+1} \left( \left[ \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{t} dt \right) \\
 &= \frac{2}{(2n+1)^2} \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{2}{(2n+1)^3}
 \end{aligned}$$

et il est clair à ce stade de l'exercice que la série de terme général  $\frac{1}{(2n+1)^3}$  converge (au besoin il suffit d'en prendre un équivalent).

On peut donc appliquer le théorème N1 et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt &= 2 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} (\ln t)^2 dt \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^3} \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}
 \end{aligned}$$

### Exercice 21 (Mines 2018)

Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

#### Correction

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} &= \frac{x}{e^{2x}} \frac{1}{1 - e^{-3x}} \\
 &= \frac{x}{e^{2x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-3x})^n \text{ car } e^{-3x} \in ]-1; 1[ \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-(3n+2)x}
 \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x e^{-(3n+2)x} \end{cases}$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  
 $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $x^2 f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- La série de fonctions de terme général  $f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa somme  
 $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} \end{cases}$  est continue.
- La série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$  converge :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-(3n+2)x} dx \\ &= \left[ x \frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} dx \\ &\quad \text{IPP facile à justifier} \\ &= \frac{1}{3n+2} \int_0^{+\infty} e^{-(3n+2)^2} dx = \frac{1}{3n+2} \left[ \frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(3n+2)^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \sim \frac{1}{9n^2} \geq 0 \text{ donc la série de terme général } \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge.}$$

On peut donc appliquer le théorème N1 et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} \end{aligned}$$

### Exercice 22 (Mines 2018)

Soit  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .
3. Calculer  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ .

### Correction

1. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

$|f_k(x)| \sim \frac{1}{k^2}$  donc la série de terme général  $f_k(x)$  converge absolument.

Donc la série de fonctions  $\sum f_k$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La série de fonctions  $\sum f_k$  converge normalement donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  :  
Soit  $[a; b]$  ( $0 < a < b$ ) un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 $\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in [a; b] |f_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(a+k)^2}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.  
 $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On peut aussi procéder ainsi :

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - La série de fonctions  $\sum_{k \geq 1} f_k$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+^* |f_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{k^2}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.
- Donc la fonction  $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $f_0$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f = f_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Une toute autre méthode est possible :

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

La série  $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$  est alternée et la suite  $(|f_k(x)|)_{k \in \mathbb{N}} = \left( \frac{1}{(x+k)^2} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante

et converge vers 0 donc la série de terme général  $f_k(x)$  converge.

Donc la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} f_k$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

De plus :

$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+^* |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$  indépendant de  $x$  et tendant vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Donc la suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} f_k$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Les  $f_k$  étant toutes continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il en résulte que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

- $\sum f_k(x)$  est une série alternée.
- $f_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$
- La suite  $(|f_k(x)|)$  est décroissante.

Donc :

$$|f(x)| \leq |f_0(x)| = \frac{1}{x^2}$$

Donc  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

3. Le théorème  $N1$  ne s'appliquera pas.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx &= \sum_{k=0}^n \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{x+k} \right]_1^{+\infty} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer  $\int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} \left| \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx \right| = \left| - \int_1^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} dx \right|$$

On peut avoir recours au théorème de convergence dominée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \begin{cases} [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_n$  est continue sur  $[1; +\infty[$  :  $R_n = f - \sum_{k=0}^n f_k$
- La suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[1; +\infty[$  vers la fonction nulle.
- La fonction nulle est continue.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [1; +\infty[ |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

avec  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  continue, positive et intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Mais le recours au théorème de convergence dominée n'est pas indispensable :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \left| \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx \right| &\leq \int_1^{+\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} \right| dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+n+1)^2} = \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

**Exercice 23** (X 2021, 50 minutes de passage)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$ .

1. Montrer que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
2. Nature de la série  $\sum u_n$  ?
3. Exprimer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$  en fonction de  $u_1$ .

**Correction**

1. On va appliquer le théorème de convergence dominée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n} \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

- La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers  $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$

- La fonction  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ |f_n(t)| = \frac{1}{(1+t^4)^n} \leq \frac{1}{1+t^4} = f_1(t)$$

avec  $f_1$  continue par morceaux positive et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  :  $f(t) = O_{+\infty} \left( \frac{1}{t^4} \right)$ .

On en déduit :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

**Remarque**

Dans la mesure où  $(u_n)$  est à valeurs positives, on peut chercher à majorer  $u_n$ .

Pour cela, il faut minorer  $(1+t^4)^n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ (1+t^4)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{4k} \geq \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} t^{4k} = 1 + nt^4$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ 0 \leq \frac{1}{(1+t^4)^n} \leq \frac{1}{1+nt^4}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+nt^4}$  est intégrable en  $+\infty$  :  $\frac{1}{1+nt^4} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{nt^4}$  avec  $4 > 1$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est bien défini (par contre  $u_0 = \int_0^{+\infty} dt$  ne l'est pas) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq u_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+nt^4}$$

On fait alors le changement de variable  $t = n^{-1/4}x$  (pour avoir  $nt^4 = x^4$ ) :  $\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

ce qui permet de montrer que  $(u_n)$  converge vers 0 et que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

2. On essaie d'abord d'intuiter le résultat :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &=? \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} \frac{1}{1-1/(1+t^4)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = +\infty \end{aligned}$$

On cherche donc à montrer que la série de terme général  $u_n$  diverge.

On raisonne par l'absurde en utilisant le théorème N1 : on suppose que la série de terme

général  $u_n$  converge.

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (découle de la domination dans la question précédente).

- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^4} \frac{1}{1-1/(1+t^4)} = \frac{1}{t^4}$$

- La fonction  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- La série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$  converge :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = u_n$$

D'après le théorème N1, la fonction  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

C'est absurde donc la série de terme général  $u_n$  est divergente.

### Remarque

On peut aussi chercher à minorer  $u_n$ .

Pour cela, il faut majorer  $(1+t^4)^n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1+t^4)^n = e^{n \ln(1+t^4)} \leq e^{nt^4}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt^4} dt = \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{n^{1/4}}$$

ce qui permet d'affirmer que la série de terme général  $u_n$  est divergente.

3. D'après l'énoncé la série  $\sum \frac{u_n}{n}$  converge. Néanmoins, on peut intuiter sa nature comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &=? \quad \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} -\ln \left( 1 - \frac{1}{1+t^4} \right) dt = \int_0^{+\infty} \left( \ln(1+t^4) - 4 \ln(t) \right) dt \end{aligned}$$

Mais la fonction  $F : t \mapsto \ln(1+t^4) - 4 \ln(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

- elle est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- $\ln$  étant intégrable sur  $]0; 1]$ ,  $F$  est intégrable sur  $]0; 1]$

- $F(t) = \ln \left( 1 + \frac{1}{t^4} \right) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4}$  donc  $F$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

Donc on intuise que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

- **Première méthode**

On commence par montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1+t^4} = -\ln \left( 1 - \frac{1}{1+t^4} \right) = \ln(1+t^4) - 4 \ln(t)$$

On en déduit que la fonction  $F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{n}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

- elle est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $\ln$  étant intégrable sur  $]0; 1]$ ,  $F$  est intégrable sur  $]0; 1]$
- $F(t) = \ln \left(1 + \frac{1}{t^4}\right) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4}$  donc  $F$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

On a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{f_n(t)}{n} dt \leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{n} dt \in \mathbb{R}$$

La série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  étant à termes positifs, on en déduit qu'elle converge.

On montre alors facilement qu'on peut appliquer le théorème N1 :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{f_n}{n}$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{f_n}{n}$  est intégrable par morceaux sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec :

$$\forall t > 0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{t^4}\right)$$

- La fonction  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{n}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- La série de terme général  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{f_n(t)}{n} \right| dt$  converge :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} \left| \frac{f_n(t)}{n} \right| dt = \frac{u_n}{n}$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^4}\right) dt$$

On fait ensuite une intégration par parties :

$$u(t) = \ln \left(1 + \frac{1}{t^4}\right), u'(t) = \frac{-4}{t^5} \frac{1}{1+t^{-4}}$$

$$v'(t) = 1, v(t) = t$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$u(t)v(t) = t \left( \ln(1+t^4) - 4 \ln(t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+ 0]$$

$$u(t)v(t) \sim_{+\infty} t \times \frac{1}{t^4} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

L'intégration par parties est donc justifiée.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t^4}\right) dt &= - \int_0^{+\infty} t \left( \frac{-4}{t^5} \frac{1}{1+t^{-4}} \right) dt \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4} \frac{1}{1+t^{-4}} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} \\ &= 4u_1 \end{aligned}$$

### Remarque

Si dans la première question, on a majoré  $u_n$ , on peut passer la première étape du raisonnement et appliquer directement le théorème N1.

### • Deuxième méthode

On fait une intégration par parties dans l'intégrale définissant  $u_n$  :

$$u(t) = (1+t^4)^{-n}, u'(t) = (-n)(4t^3)(1+t^4)^{-n-1}$$

$$v'(t) = 1, v(t) = t$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0 \text{ ou } +\infty]{} 0$

L'intégration par parties est donc justifiée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 4n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}} dt = 4n \int_0^{+\infty} \frac{t^3 + 1 - 1}{(1+t^4)^{n+1}} dt$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_n}{n} = 4(u_n - u_{n+1})$$

On a montré que la suite  $(u_n)$  convergeait donc le lien suite-série permet d'affirmer que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge.

On en déduit que la série de terme général  $\frac{u_n}{n}$  converge.

De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = 4(u_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = 4u_1$$

#### Exercice 24 (Centrale 2015, planche complète)

$$I_n = \int_0^1 t^{nt} dt$$

1. Etudier la convergence de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Ecrire  $I_n$  sous forme de somme.

#### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{nt} = e^{nt \ln t} \end{cases}$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $]0; 1]$ .

- $(f_n)$  converge simplement sur  $]0; 1]$  vers  $f \begin{cases} ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \in ]0; 1[ \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$ .
- $f$  est continue par morceaux sur  $]0; 1]$ .

#### • Domination

$\forall t \in ]0; 1] \quad \forall n \geq 1 \quad |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$   
avec  $\varphi$  continue, positive et intégrable sur  $]0; 1]$ .

On en déduit que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

2. On fixe  $n \in \mathbb{N}$ .

On prolonge  $f_n$  par continuité en posant  $f_n(0) = 1$ .

Soit  $h \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 0 \\ t \neq 0 \mapsto t \ln t \end{cases}$  de sorte que :

$$\forall t \in [0; 1] \quad f_n(t) = e^{nh(t)}$$

On observera que  $h$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ . Elle y est donc bornée.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , soit  $g_p = \frac{(nh)^p}{p!}$ .

- $\forall p \in \mathbb{N} \quad g_p$  est continue sur  $[0; 1]$ .

- La série de fonctions  $\sum_{p \geq 0} g_p$  converge normalement sur  $[0; 1]$  :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|g_p\|_{\infty} = \frac{(n \|h\|_{\infty})^p}{p!}$$

- $f_n = \sum_{p=0}^{+\infty} g_p$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \int_0^1 t^p \ln^p t dt \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} (-1)^p \frac{p!}{(p+1)^{(p+1)}} \quad \text{IPP successives} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p n^p}{(p+1)^{(p+1)}} \end{aligned}$$

### Exercice 25 (Mines 2022)

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2 + x^2}$$

#### Correction

On fixe  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} &= \frac{2 \cos(xt)}{e^t + e^{-t}} = \frac{2 \cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos(xt) e^{-(2n+1)t} \end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto (-1)^n \cos(xt) e^{-(2n+1)t} \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |f_n(t)| \leq e^{-(2n+1)t}$$

avec  $t \mapsto e^{-(2n+1)t}$  intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

•

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= (-1)^n \Re e \left( \int_0^{+\infty} e^{(ix-(2n+1))t} dt \right) \\ &= (-1)^n \Re e \left( \left[ \frac{e^{(ix-(2n+1))t}}{ix-(2n+1)} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= (-1)^n \Re e \left( \frac{1}{2n+1-ix} \right) \\ &= (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \left| \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$$

Donc la série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$  diverge et le théorème N1 ne s'applique pas.

On revient donc aux sommes partielles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} &= \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^N f_n(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \cos(xt) e^{-t} \sum_{n=0}^N (-e^{-2t})^n \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} \frac{1 + (-1)^N e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \end{aligned}$$

La fonction  $g : t \mapsto \frac{\cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |g(t)| \leq e^{-t}.$$

De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\mapsto \frac{(-1)^N \cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}}$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On peut donc séparer les intégrales et écrire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^N \cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + e^{-t}} dt + (-1)^N \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \end{aligned}$$

Pour conclure, on n'a pas besoin du théorème de convergence dominée :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t} dt = \frac{1}{2(N+1)}$$

### Exercice 26 (Mines 2013)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}} dt$ .

1. Montrer que  $I_n$  est bien définie. Déterminer la limite de  $(I_n)$ .
2. Nature de la série de terme général  $I_n$  ?

### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}} \end{cases} .$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$f_n$  est continue sur  $]0; 1[$ .

$t^{1/2} f_n(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{n+1/2} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  : classiquement, on en déduit que  $f_n$  est intégrable sur  $]0; 1/2[$ .

On cherche ensuite à préciser le comportement de  $f_n$  en 1.

On pose  $t = 1 - h$  avec  $h \rightarrow 0^+$ .

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (1-h)^n \ln(1-h)(1-(1-h)^2)^{-1/4} \\ &= (1-h)^n \ln(1-h)(2h-h^2)^{-1/4} \\ &= \ln(1-h)h^{-1/4}(2-h)^{-1/4}(1-h)^n \\ &\sim -h^{3/4}2^{-1/4} \end{aligned}$$

Donc  $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 0$  :  $f$  est prolongeable par continuité en 1.  
 $f_n$  est donc intégrable sur  $]0; 1[$ .

On applique ensuite le théorème de convergence dominée :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue et intégrable sur  $]0; 1[$ .
- La suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur  $]0; 1[$ .
- La fonction nulle est continue.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in ]0; 1[ \quad |f_n(t)| = \frac{t^n |\ln t|}{\sqrt[4]{1-t^2}} \leq \frac{|\ln t|}{\sqrt[4]{1-t^2}} = |f_0(t)|$$

avec  $|f_0|$  continue, positive et intégrable sur  $]0; 1[$ .

D'après le théorème de convergence dominée,  $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

2. La fonction  $g \begin{cases} ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{-\ln t}{(1-t)\sqrt[4]{1-t^2}} = \frac{-\ln t}{(1-t)^{5/4}(1+t)^{1/4}} \end{cases}$  est continue sur  $]0; 1[$ .

De plus  $t^{1/2}g(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} -t^{1/2} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  : classiquement, on en déduit que  $g$  est intégrable sur  $]0; 1/2[$ .

On cherche ensuite à préciser le comportement de  $g$  en 1.

On pose  $t = 1 - h$  avec  $h \rightarrow 0^+$ .

$$g(t) = -\ln(1-h)h^{-5/4}(1+h)^{-1/4} \sim h^{-1/4}2^{-1/4} = \frac{1}{2^{1/4}} \frac{1}{(1-t)^{1/4}}$$

Donc  $g$  est intégrable sur  $]0; 1[$ .

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^N (-I_n) &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 \frac{t^n (-\ln t)}{(1-t^2)^{1/4}} dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^N \frac{t^n (-\ln t)}{(1-t^2)^{1/4}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{-\ln t}{(1-t^2)^{1/4}} \frac{1-t^{N+1}}{1-t} dt = \int_0^1 (1-t^{N+1})g(t) dt \\ &\leq \int_0^1 g(t) dt \text{ car } g \text{ est positive} \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général  $-I_n$  est donc majorée. Mais c'est une série à termes positifs donc elle converge.

Finalement la série de terme général  $I_n$  converge.

### Remarque

On peut alors facilement appliquer le théorème N1.

**Exercice 27** (Centrale 2023)

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction  $f$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - f(x+1) = \frac{1}{x^3} \end{cases}$$

2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  et donner  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

### Correction

1. On procède par analyse-synthèse.

On suppose que  $f$  existe.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x) - f(x+n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(x+k) - f(x+k+1)) \quad \text{téléscopage} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x+k)^3} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  à  $x$  fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^3}$$

D'où l'unicité en cas d'existence.

Réiproquement pour tout  $n \in \mathbb{N}$  soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x+n)^3} \end{cases}$  (qui est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  en entier).

Soit  $x > 0$  fixé.

$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3}$ , tout est positif et la série de terme général  $\frac{1}{n^3}$  converge. On en déduit que la série de terme général  $f_n(x)$  converge.

La série de fonctions  $\sum f_n$  converge donc simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Sa somme, notée  $f$  dans la suite, est donc une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$\forall x \in [1; +\infty[ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[1; +\infty[$ .

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[1; +\infty[$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (théorème de la double limite).

Enfin :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} \\ &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

D'où l'existence.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $a > 0$ .

$\forall x \in [a; +\infty[ \ \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^3} \leq \frac{1}{(n+a)^3}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; +\infty[$ .

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a; +\infty[$ .

On en déduit que  $f$  est continue sur  $[a; +\infty[$ .

Comme c'est vrai pour tout  $a > 0$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue et intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

• La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[1; +\infty[$  et sa somme ( $f$ ) est continue.

• La série de terme général  $\int_1^{+\infty} |f_n(x)| dx$  converge.

En effet :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} dx = \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{(x+n)^2} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

D'après le théorème N1,  $f$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$  et :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

## 5 Dérivation

### Exercice 28 (Centrale 2019)

Pour  $x > 0$ , on pose  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

2. On admet  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$ .

Donner un équivalent de  $\varphi$  en  $0^+$ .

Quelle est la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$  ?

### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \end{cases}$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* f'_n(x) = -\sqrt{n} e^{-nx}$
- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  
Soit  $x_0 > 0$ .  
 $\forall n \geq 1 0 \leq f_n(x_0) \leq e^{-nx_0} = (e^{-x_0})^n$  avec  $|e^{-x_0}| < 1$
- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  :  
Soit  $[a, b]$  un tel segment ( $0 < a < b$ ).  
 $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [a; b] |f'_n(x)| \leq \sqrt{n} e^{-na}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente (utiliser la règle de d'Alembert)  
Donc  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ .

2. On fixe  $x > 0$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$  est continue, positive, décroissante et intégrable sur  $]0; 1]$  (en plus de  $[1; +\infty[$ ) ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

On en déduit :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

On fait alors le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  strictement croissant  $t = \frac{s}{x}$ .

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$$

puis  $\varphi(x) \sim_{0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ .

La comparaison d'une série à une intégrale donne aussi :

$$0 \leq \varphi(x) \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt \leq e^{-x} + \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = e^{-x} + \frac{1}{x}$$

Donc  $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ .

### Exercice 29 (Centrale 2019)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{(x+n)^2} \end{cases}$ .

Soit  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

1. Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
2. Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ?
3. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4.  $f$  est-elle  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  ?

### Correction

1. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  fixé.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq f_n(x_0) \leq \frac{1}{n^2}$$

Donc  $\sum f_n(x_0)$  converge.  
 $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

2.  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$   
 Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

3. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :  
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ f'_n(x) = -\frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} - \frac{2 e^{-nx}}{(x+n)^3}$

- $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $\sum f'_n$  converge normalement donc uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$ .  
 Soit  $[a; b]$  un tel segment.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ |f'_n(x)| \leq \frac{e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n^3}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in [a; b] \ |f'_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n} + \frac{2}{n^3} = u_n \text{ indépendant de } x.$$

La série de terme général  $u_n$  converge car :

$$n^2 u_n = n e^{-na} + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[a; b]$ .

4.  $\forall x > 0 \ f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(x+n)^3}$

Supposons  $f$   $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{x > 0} f'(0) = l_1 \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{(x+n)^3} \end{cases}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |g_n(x)| = g_n(x) \leq \frac{1}{n^3}$$

La série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}_+$ .

On en déduit la continuité de  $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ .

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -l_1 - 2g(0) = l \in \mathbb{R}$$

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \sum_{n=1}^N \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2}$$

On fait tendre  $x$  vers  $0^+$  :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq l \in \mathbb{R}$$

On en déduit que la série harmonique converge (série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée).

C'est absurde donc  $f$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 30** (Mines 2018)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que  $f$  est définie et continue.
2. Montrer que  $f$  est dérivable et croissante.
3. Limite de  $f$  et de  $f'$  en  $+\infty$ .

### Correction

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \end{cases}$ 
  - Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
  - La série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $\mathbb{R}$  :  
Les accroissements finis donnent :  
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$ .

Soit  $[a; b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  ( $a < b$ ).  
Soit  $c = \max(|a|, |b|)$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [a; b] \quad |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{c}{n^2}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[a; b]$ .

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a; b]$ .

On en déduit que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. • Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$$

- $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

- $\sum f'_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$  :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f'_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  indépendant de  $x$  et terme général d'une série convergente.

Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} > 0$$

$f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

3. Une comparaison série intégrale donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f'(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[ \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

Donc  $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$

$f$  est croissante donc  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$

Supposons  $l$  fini.

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{n=1}^N f_n(x) \leq f(x) \leq l$$

On fait tendre  $x$  vers  $+\infty$  :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2n} \leq l < +\infty$$

On en déduit que la série harmonique diverge, ce qui est absurde.

Donc :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

**Exercice 31** (*Mines 2019*)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-kx})$$

1. Domaine de définition de  $f$  ?
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
3. Limite de  $f$  en  $+\infty$  ?
4.  $f(\mathcal{D}_f)$  ?

**Correction**

1. Si  $x < 0$ ,  $\ln(1 + e^{-kx}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$  : la série de terme général  $\ln(1 + e^{-kx})$  diverge grossièrement.

Si  $x = 0$  alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \ln(1 + e^{-kx}) = \ln(2)$$

De nouveau, la série de terme général  $\ln(1 + e^{-kx})$  diverge grossièrement.

Si  $x > 0$ ,  $e^{-kx} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  donc :

$$\ln(1 + e^{-kx}) \sim e^{-kx} = (e^{-x})^k \text{ avec } e^{-x} < 1.$$

Tout est positif donc on peut utiliser l'équivalent pour conclure : la série de terme général  $\ln(1 + e^{-kx})$  converge.

Finalement,  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ .

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1 + e^{-kx}) \end{cases}$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_k$  est  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'_k(x) = \frac{-k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}}$$

- La série de fonctions de terme général  $f_k$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- La série de fonctions de terme général  $f'_k$  converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de  $\mathbb{R}_+^*$  :

Soit  $[a; b]$  un segment de  $\mathbb{R}_+^*$  ( $0 < a < b$ )

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b] \quad |f'_k(x)| = \frac{k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} \leq k e^{-ka} \text{ indépendant de } x \text{ et terme général d'une série convergente :}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k e^{-ka} > 0$$

$$\frac{(k+1) e^{-(k+1)a}}{k e^{-ka}} = \frac{k+1}{k} e^{-a} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{-a} < 1$$

Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son domaine de définition et :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} = - \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-kx}}{1 + e^{-kx}}$$

3. Le terme pour  $k = 0$  vaut  $\ln(2)$ .

$$\forall x > 0 \quad \ln(2) \leq f(x) \leq \ln(2) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} = \ln(2) + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Donc la limite cherchée est  $\ln(2)$ .

$$4. \forall x > 0 \quad f'(x) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} < 0 :$$

$f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$f$  a donc une limite (finie ou infinie) en 0. On la note  $l$ .

Le théorème de la bijection donne alors  $f(\mathcal{D}_f) = ]\ln(2); l[$ .

Supposons  $l$  finie.

$\forall x > 0 \quad f(x) < l$

et :

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx}) \leq f(x)$$

On en déduit :

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx}) \leq l$$

On fixe  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et on fait tendre  $x$  vers 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(2) < l$$

On en déduit  $l = +\infty$ .

### Exercice 32 (Mines 2018)

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et exprimer  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  comme somme d'une série convergente.

#### Correction

On note  $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ .

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$

et  $a_n \sim \frac{\pi}{2^n}$ .

1. On fixe  $x \in \mathbb{R}$ .

$$e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \pi \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \text{ et tout est positif donc :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ converge} &\iff \sum_{n \geq 0} \pi \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \text{ converge} \\ &\iff \frac{e^{-x}}{2} < 1 \iff e^{-x} < 2 \\ &\iff -x < \ln(2) \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{D}_f = ]-\ln(2); +\infty[$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n \begin{cases} ]-\ln(2); +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \end{cases}$

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in ]-\ln(2); +\infty[ f'_n(x) = -n e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

• La série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $]-\ln(2); +\infty[$ .

- La série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $]-\ln(2); +\infty[$  :  
 Soit  $[a; b]$  ( $-\ln(2) < a < b$ ) un segment inclus dans  $]-\ln(2); +\infty[$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [a; b] |f'_n(x)| = n e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq n a_n e^{-na} \text{ indépendant de } x.$$

$na_n e^{-na} \sim n\pi \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$  et tout est positif donc la série de terme général  $na_n e^{-na}$  est de même nature que la série de terme général  $v_n = n\pi \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n > 0$  et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{n} \frac{e^{-a}}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{e^{-a}}{2} < \frac{e^{\ln(2)}}{2} = 1$$

Par la règle de d'Alembert, la série de terme général  $v_n$  converge.

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge normalement sur  $[a; b]$ .

On en déduit que la série de fonctions  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a; b]$ .

Donc  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur son domaine de définition.

3. On remarque que la fonction  $f_0$  est la fonction nulle. Donc en fait  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  :

$n > 0$  donc  $x \mapsto e^{-nx}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  et sa somme est continue sur  $\mathbb{R}_+$  : cf les deux premières questions.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

On en déduit que la série de terme général  $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$  converge :

$$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \frac{\pi}{2^n n} \text{ et tout est positif.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* w_n = \frac{\pi}{2^n n} > 0$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général  $w_n$  converge.

D'après le théorème N1  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$