

ANALYSE 1
TD
2025-2026
Chapitre 3
Suites et séries de fonctions

941

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{nx}{1+n^3x^2} \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}_+ ?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?

Correction

1. Si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
Si $x > 0$, $f_n(x) \sim \frac{nx}{n^3x^2} = \frac{1}{n^2x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur \mathbb{R}_+ .
2. $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$
 f_n croît sur $\left[0; \frac{1}{n^{3/2}}\right]$ de 0 à $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ puis décroît de $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ à 0.
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \|f_n\|_\infty = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \cos^n(x) \end{cases}$.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

Correction

$$1. \text{ Si } x = 0, f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Si } x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right], 0 \leq \cos(x) < 1 \text{ donc } \cos^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = \cos^{n-1}(x) ((n+1)\cos^2(x) - n)$$

$$\text{On pose } x_n = \arccos\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right).$$

f_n croît sur $[0; x_n]$ puis décroît.

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \sin(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq \cos^n(x_n) \leq 1$$

$$\text{Donc } f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Exercice 3

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}_+ ?

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?

Correction

$$1. \text{ Si } x = 0, f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Si } x > 0, x e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers 0 sur \mathbb{R}_+ .

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+ f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$$

$$f_n \text{ croît sur } \left[0; \frac{1}{n} \right] \text{ de } 0 \text{ à } \frac{n^{\alpha-1}}{e} \text{ puis décroît de } \frac{n^{\alpha-1}}{e} \text{ à } 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \|f_n\|_\infty = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

• **Premier cas :** $\alpha < 1$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+ .

• **Deuxième cas :** $\alpha \geq 1$

Il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ , ni sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 4

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{4 - (\ln x)^{2n}}{3 + (\ln x)^{2n}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto -1 \end{cases}.$$

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $[0; 1]$?

2. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Correction

1. • **Premier cas : $x = 0$**

$$f_n(0) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$$

• **Deuxième cas : $0 < x < \frac{1}{e}$**

$$\ln(x) < -1 \text{ donc } (\ln(x))^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$$

• **Troisième cas : $x = \frac{1}{e}$**

$$f_n(0) = \frac{3}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}$$

• **Quatrième cas : $x > \frac{1}{e}$**

$$-1 < \ln(x) < 0 \text{ donc } (\ln(x))^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0; 1]$ vers f $\begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -1 \text{ si } x < \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e} \mapsto \frac{3}{4} \\ x \mapsto \frac{4}{3} \text{ si } x > \frac{1}{e} \end{cases}$.

2. On peut parler de continuité : il n'y a pas convergence uniforme sur $[0; 1]$.

Pour être plus complet, on introduit g $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{4-t}{3+t} \end{cases}$ de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0; 1[\quad f_n(x) = g((\ln(x))^{2n})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad g'(t) = \frac{-7}{(3+t)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0; 1[\quad f'_n(x) = \frac{-7}{(3 + (\ln(x))^{2n})^2} \times 2n \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^{2n-1} \text{ du signe de } \ln(x) \text{ car } 2n-1 \text{ est impair.}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in]0; 1[\quad f'_n(x) < 0$$

Donc f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Sur $[a; b]$ avec $0 \leq a < b < \frac{1}{e}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) + 1| = f_n(b) + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car } f_n + 1 \text{ croît)}$$

de $f_n(a) + 1 \geq 0$ à $f_n(b) + 1$)

Par contre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in [0; 1/e]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0; 1/e]} |f_n(x) - f(x)| = 1 + \frac{3}{4}$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $\left[0; \frac{1}{e}\right]$ ou $\left[0; \frac{1}{e}\right[$

Sur $[a; b]$ avec $\frac{1}{e} < a < b \leq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in [a; b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a; b]} \left| f_n(x) - \frac{4}{3} \right| = \left| f_n(a) - \frac{4}{3} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (car } f_n - \frac{4}{3} \text{ croît)}$$

de $f_n(a) - \frac{4}{3} \leq 0$ à $f_n(b) - \frac{4}{3} \leq 0$)

Par contre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{x \in [1/e; 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1/e; 1]} |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{3}{4} - \frac{4}{3} \right|$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $\left[\frac{1}{e}; 1 \right]$ ou $\left] \frac{1}{e}; 1 \right]$

Exercice 5 (*Mines 2023, 2024*)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} définie par $f_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; 1] f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction

On fixe $a \in [0; 1]$ et on s'intéresse à la suite (de nombres) récurrente définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = g(u_n) \text{ avec } g : x \mapsto x + \frac{1}{2}(a - x^2)$$

g est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} g'(x) = 1 - x$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations de g .

$$\forall x \in \mathbb{R} g(x) - x = \frac{1}{2}(a - x^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)$$

En particulier $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

Avec le tableau de variations, on en déduit que l'intervalle $[0; \sqrt{a}]$ est stable par g . Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n \in [0; \sqrt{a}]$$

Avec le signe de $g(x) - x$, on montre alors que la suite (u_n) est croissante.

(u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge. f étant continue sur \mathbb{R} , la limite de la suite

(u_n) est un point fixe de g compris entre 0 et \sqrt{a} . Cela ne peut être que \sqrt{a} .

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $\sqrt{\cdot}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= u_n - \sqrt{a} + \frac{a - u_n^2}{2} \\ &= (u_n - \sqrt{a}) \left(1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq u_n \leq \sqrt{a}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leq 1 - \sqrt{a} \leq 1 - \frac{\sqrt{a} + u_n}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2} \right) |u_n - \sqrt{a}|$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} |u_n - \sqrt{a}| \leq \sqrt{a} \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{2} \right)^n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n$$

Soit $\epsilon > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [0; \epsilon^2] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \sqrt{x} \leq \epsilon$$

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in [\epsilon^2; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leq \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \epsilon$$

Donc :

$$\forall n \geq n_0 \forall x \in [0; 1] |f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers la fonction racine carrée.

Exercice 6 (Centrale MP 2016)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([1; +\infty[, \mathbb{R})$.

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on définit } f_n \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{n}{x} \left(f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right) \end{cases}.$$

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
2. On se place dans des cas particuliers.
 - (a) Si $f = \ln$, montrer qu'il y a convergence uniforme.
 - (b) Si $f = \sin$, montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
3. (a) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 et que la fonction $x \mapsto xf''(x)$ est bornée. Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) .
- (b) On suppose que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément. Que peut-on dire du comportement de f' en $+\infty$?

Correction

1. On fixe $x \in [1; +\infty[$.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ donc } \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} f'(x)$$

$$\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x)$$

La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[1; +\infty[$ vers la fonction f' .

2. (a)

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}^* |f_n(x) - f'(x)| &= \left| \frac{n}{x} \left(\ln \left(x + \frac{x}{n} \right) - \ln(x) \right) - \frac{1}{x} \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \text{ indépendant de } x \end{aligned}$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2} \text{ donc } n \left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.

- (b)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f'(x)| &\geq |f_n(n\pi) - f'(n\pi)| \\ &\geq \left| \frac{1}{\pi} (\sin((n+1)\pi) - \sin(n\pi)) - \cos(n\pi) \right| = 1 \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f'(x)|\right)$ ne converge pas vers 0.

Donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.

3. (a)

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n(x) - f'(x)| &= \left| \frac{n}{x} \left(f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right) - f'(x) \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \frac{x}{n} f'(x) \right| \\ &= \frac{n}{x} \left| f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) - \left(x + \frac{x}{n} - x\right) f'(x) \right| \\ &\leq \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \sup_{x \leq t \leq x + \frac{x}{n}} (|f''(t)|) \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto x f''(x)$ est bornée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \geq 1 \quad x |f''(x)| \leq M$$

On en déduit :

$$\forall x \geq 1 \quad |f''(x)| \leq \frac{M}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |f_n(x) - f'(x)| &\leq \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \sup_{x \leq t \leq x + \frac{x}{n}} \left(\frac{M}{t} \right) = \frac{n}{x} \frac{x^2}{2n^2} \frac{M}{x} \\ &\leq \frac{M}{2n} \text{ indépendant de } x \text{ et converge vers } 0 \end{aligned}$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.

(b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \geq 1 \quad f_n(x) = n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{f\left(x + \frac{x}{n}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - n \frac{f(x)}{x}$$

On en déduit :

$$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{1}{n} \right) l - nl = l$$

De plus, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f' sur $[1; +\infty[$.

D'après le théorème de la double limite, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$.

2 Modes de convergence d'une série de fonctions

Exercice 7 (Mines 2012)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $U_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n(1-t)^a \end{cases}$.

Etudier la convergence simple sur $[0; 1]$ de la série de fonctions de terme général U_n .

Etudier sa convergence normale.

Etudier sa convergence uniforme.

Etudier la convergence normale sur $[0; b]$ avec $0 < b < 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0; 1])$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^n f(t) \end{cases}$.

Etudier la convergence normale sur $[0; 1]$ de la série de fonctions de terme général V_n .

Correction

- **Convergence simple**

Soit $t \in [0; 1]$ fixé.

Si $t \in [0; 1[$ alors la série géométrique $\sum t^n$ converge donc la série $\sum U_n(t)$ converge.

Si $t = 1$ alors $U_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum U_n(t)$ converge.

La série de fonctions $\sum U_n$ converge donc simplement sur $[0; 1]$.

- **Convergence normale**

$\forall n \in \mathbb{N} \forall t \in [0; 1[\ U'_n(t) = t^{n-1}(1-t)^{a-1}(n - (a+n)t)$

$a > 0$ donc $\frac{n}{a+n} \in]0; 1[$.

U_n croît sur $\left[0; \frac{n}{a+n}\right]$ de 0 à $U_n\left(\frac{n}{a+n}\right)$ puis décroît de $U_n\left(\frac{n}{a+n}\right)$ à 0.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|U_n\|_\infty &= \left(\frac{n}{a+n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{a+n}\right)^a \\ &= \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n} \left(\frac{a}{a+n}\right)^a \\ &\sim \frac{K}{n^a} \end{aligned}$$

$\sum U_n$ converge normalement sur $[0; 1] \iff a > 1$

- **Convergence uniforme**

La somme de la série de fonctions est $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (1-t)^{a-1} \text{ si } t < 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t = 1 \end{cases}$.

Elle n'est pas continue si $a \leq 1$.

Donc si $a \leq 1$, la série de fonctions $\sum U_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; 1]$.

Par contre si $a > 1$, elle converge uniformément car elle converge normalement.

Donc :

$\sum U_n$ converge uniformément sur $[0; 1] \iff a > 1$

On peut aussi traiter cette question sans avoir recours au théorème de continuité :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in [0; 1[\ R_n(t) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k (1-t)^a \\ &= (1-t)^a \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = (1-t)^a \frac{t^{n+1}}{1-t} \\ &= (1-t)^{a-1} t^{n+1} = U_{n+1}(t) \text{ avec } a-1 \text{ à la place de } a \end{aligned}$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(1) = 0$$

$$\text{Si } a > 1, \|R_n\|_\infty = U_{n+1} \left(\frac{n+1}{a-1+n+1} \right) \sim \frac{K}{n^{a-1}}$$

On en déduit que $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

Donc la série de fonctions $\sum U_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Bien sûr, dans le cas $a > 1$, on peut se contenter de dire que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Par contre, si $0 < a \leq 1$, R_n est positive et croissante sur $[0; 1[$ et $R_n(1) = 0$ donc :

$$\|R_n\|_\infty = \lim_{t \rightarrow 1^-} R_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

La suite $(\|R_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum U_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0; 1]$.

- **Convergence normale sur $[0; b]$ avec $0 < b < 1$**

$$\frac{n}{a+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad \frac{n}{a+n} \geq b$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_0 \quad \sup_{t \in [0; b]} (|U_n(t)|) = U_n(b) \text{ terme général d'une série convergente.}$$

On en déduit qu'il y a convergence normale sur $[0; b]$ pour tout $b \in]0; 1[$.

On peut également raisonner comme suit :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; b] \quad |U_n(t)| = t^n(1-t)^a \leq b^n$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions $\sum U_n$ converge normalement sur $[0; b]$.

- **Séries de fonctions de terme général V_n**

Par Taylor-Young :

$$f(t) = \frac{f''(t)}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2)$$

$$\text{Donc } \frac{f(t)}{(1-t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{f''(1)}{2}$$

$$\text{La fonction } g \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(t)}{(1-t)^2} \text{ si } t < 1 \\ 1 \mapsto \frac{f''(1)}{2} \end{cases} \text{ est continue.}$$

$$\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = (t-1)^2 g(t)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0; 1] \quad V_n(t) = g(t)U_n(t) \text{ avec } a = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|V_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty \times \|U_n\|_\infty$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} V_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.

Exercice 8 (Mines 2024)

On fixe $\alpha > 0$ et on pose $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin^n(x) \cos^\alpha(x) \end{cases}$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .
2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?
3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

Correction

1. **Convergence simple sur I :**

Pour tout $x \in I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on distingue deux cas :

- Si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(x) = 0$, donc $f_n(x) = 0$ pour tout n . La série converge trivialement et sa somme est nulle.
- Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin(x) \in [0, 1[$. La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est une série géométrique de raison $\sin(x) \in [0, 1[$, donc convergente. Sa somme vaut :

$$S(x) = \frac{\cos^\alpha(x)}{1 - \sin(x)}.$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .

2. **Convergence normale sur I :**

On étudie $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$, où $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

Calcul de la dérivée de f_n

Pour calculer f'_n , nous utilisons la règle de dérivation d'un produit :

$$f'_n(x) = \frac{d}{dx} [\sin^n(x)] \cdot \cos^\alpha(x) + \sin^n(x) \cdot \frac{d}{dx} [\cos^\alpha(x)]$$

Dérivée des composantes

- (a) Dérivée de $\sin^n(x)$ (en utilisant la dérivation des fonctions composées) :

$$\frac{d}{dx} [\sin^n(x)] = n \sin^{n-1}(x) \cos(x)$$

- (b) Dérivée de $\cos^\alpha(x)$, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{d}{dx} [\cos^\alpha(x)] = \alpha \cos^{\alpha-1}(x) (-\sin(x)) = -\alpha \cos^{\alpha-1}(x) \sin(x)$$

Expression complète de la dérivée

En substituant ces résultats :

$$f'_n(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos(x) \cdot \cos^\alpha(x) + \sin^n(x) \cdot (-\alpha \cos^{\alpha-1}(x) \sin(x))$$

Ce qui se simplifie en :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'_n(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha+1}(x) - \alpha \sin^{n+1}(x) \cos^{\alpha-1}(x)$$

Forme factorisée

On peut factoriser l'expression par $\sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x)$:

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x) \left[n \cos^2(x) - \alpha \sin^2(x) \right]$$

Conclusion

La dérivée de f_n est donc donnée par :

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x) \cos^{\alpha-1}(x) \left(n \cos^2(x) - \alpha \sin^2(x) \right)$$

Il est facile de trouver son signe et de dresser le tableau de variations de f_n .

Pour $n \geq 1$, le maximum de f_n est atteint en $x_n = \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{\alpha}}\right)$, et on a, puisque f_n est positive :

$$\|f_n\|_{\infty} = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^{n/2} \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^{\alpha/2} \sim e^{-\alpha/2} \alpha^{\alpha/2} n^{-\alpha/2}.$$

En effet :

$$\cos^2(x_n) = \frac{1}{1 + \tan^2(x_n)} = \frac{1}{1 + \frac{n}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha + n}$$

On en déduit :

$$\sin^2(x_n) = \tan^2(x_n) \cos^2(x_n) = \frac{n}{\alpha + n}$$

$$\text{Classiquement } \left(\frac{n}{\alpha + n}\right)^{n/2} = \exp\left(-\frac{n}{2} \ln\left(\frac{n + \alpha}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha/2}$$

La série $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Conclusion : La série converge normalement sur I si et seulement si $\alpha > 2$.

3. Convergence uniforme sur I :

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et si on pose } t = \frac{\pi}{2} - x :$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\cos^{\alpha}(x)}{1 - \sin(x)} = \frac{\sin^{\alpha}(t)}{1 - \cos(t)} \sim \frac{2t^{\alpha}}{t^2} \\ &\sim 2t^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Donc si $\alpha \leq 2$, S n'est pas continue en 1 et il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur I .

Par contre si $\alpha > 2$, il y a convergence uniforme sur I car il y a convergence normale sur I .

Examinons la solution de Deepseek.

$$\text{On étudie le reste } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$R_n(x) = \frac{\cos^{\alpha}(x) \sin^{n+1}(x)}{1 - \sin(x)}.$$

En posant $y = \sin(x)$, on étudie $g_n(y) = (1 + y)^{\alpha/2} (1 - y)^{\alpha/2-1} y^{n+1}$.

Calcul de la dérivée de $g_n(y)$

Soit la fonction :

$$g_n(y) = (1 + y)^{\alpha/2} (1 - y)^{\alpha/2-1} y^{n+1}$$

avec $y \in [0, 1]$, $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Dérivation logarithmique

Pour simplifier le calcul, nous utilisons la méthode de dérivation logarithmique.

(a) Prenons le logarithme naturel :

$$\ln g_n(y) = \frac{\alpha}{2} \ln(1+y) + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \ln(1-y) + (n+1) \ln y$$

(b) Dérivons chaque terme :

$$\frac{g'_n(y)}{g_n(y)} = \frac{\alpha}{2(1+y)} - \frac{\alpha/2 - 1}{1-y} + \frac{n+1}{y}$$

(c) Multiplions par $g_n(y)$ pour obtenir $g'_n(y)$:

$$g'_n(y) = g_n(y) \left[\frac{\alpha}{2(1+y)} - \frac{\alpha-2}{2(1-y)} + \frac{n+1}{y} \right]$$

Expression développée

En substituant $g_n(y)$ et en mettant au même dénominateur :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2} (1-y)^{\alpha/2-1} y^{n+1} \left[\frac{\alpha y(1-y) - (\alpha-2)y(1+y) + 2(n+1)(1-y^2)}{2y(1-y^2)} \right]$$

Simplification du numérateur

Développons le numérateur :

$$\begin{aligned} N &= \alpha y(1-y) - (\alpha-2)y(1+y) + 2(n+1)(1-y^2) \\ &= \alpha y - \alpha y^2 - \alpha y - \alpha y^2 + 2y + 2y^2 + 2(n+1) - 2(n+1)y^2 \\ &= (-2\alpha y^2 + 2y^2 - 2(n+1)y^2) + (\alpha y - \alpha y + 2y) + 2(n+1) \\ &= [-2(\alpha+n)y^2] + 2y + 2(n+1) \end{aligned}$$

Expression finale

La dérivée s'écrit donc :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2-1} (1-y)^{\alpha/2-2} y^n \left[-(\alpha+n)y^2 + y + (n+1) \right]$$

Conclusion

La dérivée de g_n est donnée par :

$$g'_n(y) = (1+y)^{\alpha/2-1} (1-y)^{\alpha/2-2} y^n \left[(n+1) + y - (\alpha+n)y^2 \right]$$

On en déduit que $\|g_n\|_\infty = g_n \left(\frac{1 + \sqrt{4n^2 + 4(\alpha+1)n + 4\alpha + 1}}{2(\alpha+n)} \right)$

$$y_n \approx 1 - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Développement asymptotique

Posons $y = 1 - \frac{t}{n}$ avec $t = \mathcal{O}(1)$. On a :

$$\begin{aligned}
 (1+y)^{\alpha/2} &\approx 2^{\alpha/2} \\
 (1-y)^{\alpha/2-1} &= \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha/2-1} \\
 y^{n+1} &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \approx e^{-t}
 \end{aligned}$$

Comportement au voisinage du maximum

En substituant dans $g_n(y)$:

$$g_n(y) \approx 2^{\alpha/2} \left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-t}$$

Au point critique $t \approx \alpha + \frac{1}{2}$, on obtient :

$$g_n(y_n) \sim 2^{\alpha/2} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-\alpha - \frac{1}{2}}$$

Équivalent final On en déduit l'équivalent quand $n \rightarrow +\infty$:

$$g_n(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{\alpha/2} \left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n}\right)^{\alpha/2-1} e^{-\alpha - \frac{1}{2}}$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, $\sup_{y \in [0,1[} g_n(y) \sim C \cdot n^{-\alpha/2+1}$.

Conclusion : La série converge uniformément sur I si et seulement si $\alpha > 1$.

C'est une erreur très surprenante. La CNS est $1 - \frac{\alpha}{2} < 0$ soit $\alpha > 2$.

3 Continuité

Exercice 9 (Centrale 2022)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S_α .
2. Pour $\alpha < 2$, montrer que S_α est continue sur \mathbb{R}_+ .
3. Pour $\alpha \geq 2$, S_α est-elle continue sur \mathbb{R}_+ ?

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1} \end{cases}$ (qui est définie sur \mathbb{R}).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

• **Premier cas** : $x < 0$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$ diverge grossièrement.

• **Deuxième cas : $x = 0$**

Tous les termes de la série sont nuls donc $S_\alpha(0)$ est défini et vaut 0.

• **Troisième cas : $x > 0$**

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) > 0$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général $f_n(x)$ converge.

Le domaine de définition de S_α est donc \mathbb{R}_+ .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = \frac{n^\alpha}{n^2 + 1} (e^{-nx} - nx e^{-nx}) = \frac{n^\alpha e^{-nx}}{n^2 + 1} (1 - nx)$$

La fonction f_n croît de 0 à $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha+1} e^{-1}}{n^2 + 1}$ puis décroît de $\frac{n^{\alpha-1} e^{-1}}{n^2 + 1}$ à 0.

$$\text{Donc } \|f_n\|_\infty = \frac{n^{\alpha-1} e^{-1}}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{e n^{3-\alpha}}$$

Si $\alpha < 2$ alors $3 - \alpha > 1$ et il y a convergence normale sur \mathbb{R}_+ .

Les fonctions f_n étant toutes continues sur \mathbb{R}_+ , S_α est continue sur \mathbb{R}_+ .

3. On fixe $x > 0$.

La fonction $\phi_x : t \mapsto \frac{xt^\alpha e^{-tx}}{t^2 + 1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \phi'_x(t) &= x \frac{(\alpha t^{\alpha-1} - xt^\alpha) e^{-tx} (t^2 + 1) - 2t^{\alpha+1} e^{-tx}}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x e^{-tx}}{(t^2 + 1)^2} (\alpha t^{\alpha+1} + \alpha t^{\alpha-1} - xt^{\alpha+2} - xt^\alpha - 2t^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

La fonction ϕ_x n'est décroissante qu'à partir d'un certain rang, qui dépend de x .

L'utilisation de la comparaison série intégrale me paraît difficile.

Soit $\alpha \geq 2$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_\alpha\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\geq \sum_{k=n}^{2n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{car tout est positif} \\ &\geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{k^\alpha}{k^2 + 1} \frac{1}{n} e^{-k/n} \\ &\geq (n+1) \frac{n^\alpha}{(2n)^2 + 1} \frac{1}{n} e^{-2} \sim \frac{n^{\alpha-2}}{4e^2} \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $\left(S_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

La fonction S_α n'est pas continue en 0.

Exercice 10 (*Mines 2017*)

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right)$ avec $a > 0$.

1. Domaine de définition ?
2. Continuité.
3. Equivalent en 0 et en $+\infty$.

Correction

1. f n'est clairement pas définie en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right)$ est bien défini.

$\ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2 n^2}$ et tout est positif donc la série de terme général $\frac{a}{x^2 n^2}$ converge.

Le domaine de définition de f est \mathbb{R}^* . f est paire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R}_+^* :
Soit $[\alpha; \beta]$ ($0 < \alpha < \beta$) un segment de \mathbb{R}_+^* .

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [\alpha; \beta] \left| \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \right| = \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{a}{\alpha^2 n^2} \right)$ indépendant de x et terme général d'une série convergente

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[\alpha; \beta]$.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[\alpha; \beta]$.

La fonction f est donc continue sur \mathbb{R}_+^* .

Par parité, f est continue sur \mathbb{R}^* .

3. • En 0^+ .

On va utiliser une comparaison série intégrale.

On fixe $x > 0$ et on définit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) \end{cases}$.

φ est continue, décroissante et intégrable sur \mathbb{R}_+^* :

$\varphi(t) \sim_0 -2 \ln(t)$

En effet $\varphi(t) = \ln(x^2 t^2 + a) - 2 \ln(x) - 2 \ln(t) = -2 \ln(t) + \ln(a) - 2 \ln(x) + o(1)$.

$\varphi(t) \sim_{+\infty} \frac{a}{x^2 t^2}$

On a donc :

$$\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 t^2} \right) dt$$

On fait le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement croissant $s = xt$:

$$\frac{1}{x} \int_x^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right) ds \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right) ds$$

On procède à une IPP :

$$u'(s) = 1, u(s) = s$$

$$v(s) = \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right), v'(s) = \frac{-2a}{s^3} \frac{1}{1 + a/s^2}$$

u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$u(s)v(s) = s \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right) = s \ln (s^2 + a) - 2s \ln (s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0$$

$$u(s)v(s) \sim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{a}{s^2} = \frac{a}{s} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

L'intégration par parties est donc justifiée et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right) ds &= \int_0^{+\infty} s \frac{-2a}{s^3} \frac{1}{1 + a/s^2} ds \\ &= 2a \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a} = 2a \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \left(\frac{s}{\sqrt{a}} \right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi \sqrt{a} \end{aligned}$$

De plus $\int_x^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{s^2} \right)$ donc :

$$f(x) \sim_0 \frac{\pi \sqrt{a}}{x}$$

- En $+\infty$.

— **Première méthode**

En appliquant la formule de Taylor avec reste-intégral, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(1+t) = t + \int_0^t \frac{(t-s)^1}{1!} \frac{-1}{(1+s)^2} ds$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\ln(1+t) - t| \leq \int_0^t (t-s) ds = \left[-\frac{(t-s)^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \geq \sqrt{a} \quad \left| f(x) - \frac{a}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) - \frac{a}{x^2 n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \ln \left(1 + \frac{a}{x^2 n^2} \right) - \frac{a}{x^2 n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ma^2}{x^4 n^4} = \frac{1}{x^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Ma^2}{n^4} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) - \frac{a}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Donc :

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{a\pi^2}{6x^2}$$

— **Deuxième méthode**

$$\forall x > 0 \quad x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right)$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \ln \left(1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right) \end{cases}$$

$$\text{— Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^2}$$

— La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g_n(x)| = x^2 \ln \left(1 + \frac{a}{n^2 x^2} \right) \leq x^2 \times \frac{a}{n^2 x^2} \text{ par concavité de } \ln.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |g_n(x)| \leq \frac{a}{n^2} \text{ indépendant de } x \text{ et terme général d'une série convergente.}$$

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+^* .

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

$$\text{D'après le théorème de la double limite } x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} \neq 0.$$

On en déduit :

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2}$$

Exercice 11 (CCP 2017)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$. (Indication : distinguer le cas où θ est un multiple de 2π)
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On pose pour n dans \mathbb{N}^* , $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n.$$

3. Discuter en fonction de θ la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$.
4. Montrer que $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$.

Correction

1. $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n 1 = n$ si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
 $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ sinon car $e^{i\theta} \neq 1$.
- 2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=1}^n a_k S_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n \text{ car } S_0 = 0 \end{aligned}$$

On peut également raisonner par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n$

Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^1 a_k b_k = a_1 b_1$ et $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n = a_1 S_1 = a_1 b_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + (a_n - a_{n+1}) S_n + a_{n+1} S_n + a_{n+1} b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} (S_n + b_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_{n+1} \end{aligned}$$

3. La série diverge si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, converge sinon.

En effet si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ c'est la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$.

Par contre, si on suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

on pose $S_k(\theta) = \sum_{j=1}^k e^{ik\theta}$ et on a par application de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k(\theta) + \frac{S_n(\theta)}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} + \frac{S_n(\theta)}{n}$$

Il résulte du calcul de la première question, qu'à θ fixé, la suite $(S_n(\theta))$ est bornée.

Donc $\frac{S_n(\theta)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus $\frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} = O_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)$ donc la série de terme général $\frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$ converge absolument donc converge.

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge avec $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$

$$4. \quad \forall \theta \in]0; 2\pi[\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k \begin{cases}]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta \mapsto \frac{S_k(\theta)}{k(k+1)} \end{cases}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur $]0; 2\pi[$.
- Pour tout $\epsilon \in]0; \pi[$ la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$:

$$\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |S_k(\theta)| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)} \leq \frac{1}{\sin(\epsilon/2)}$$

Donc :

$\forall \theta \in [\epsilon; 2\pi - \epsilon] \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |f_k(\theta)| \leq \frac{1}{k^2 \sin(\epsilon/2)}$ indépendant de θ et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$.

Donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge uniformément sur $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$.

La fonction $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est donc continue sur tout segment $[\epsilon; 2\pi - \epsilon]$ avec $\epsilon \in]0; \pi[$. Elle est donc continue sur $]0; 2\pi[$.

La fonction $\theta \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ est donc continue sur $]0; 2\pi[$.

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\forall \theta \in]0; 2\pi[\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \frac{1}{\sin(\theta/2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} \sin(n\theta/2)}{k(k+1)}$$

et la série de fonctions converge normalement sur \mathbb{R} en entier.

Il n'y a plus qu'à prendre la partie imaginaire pour prouver que la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ est continue sur $]0, 2\pi[$.

4 Intégration

Exercice 12 (CCP 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \int_0^1 x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx$ et $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\dots+x^n} \end{cases}$.

1. Calculer pour tout $x \in [0; 1]$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

En déduire l'existence de u_n .

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x) \ln(1-x^{n+1})]$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

4. (a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du$$

- (b) En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^2}$.

5. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx$ converge.

- (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

Correction

1. Il y a une formule dans le cours pour cette somme mais peut-être fallait-il la redémontrer ?

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1] \quad (1-x) \sum_{k=0}^n x^k &= \sum_{k=0}^n (1-x)x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) \\ &= 1 - x^{n+1} \text{ par simplification en cascade} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall x \in [0; 1[\quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $g_n \begin{cases} [0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \end{cases}$ est continue.

$$\forall x \in [0; 1[\quad g_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^n} \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \frac{1}{n+1}$$

Donc g_n est prolongeable en une fonction continue sur $[0; 1]$.

Donc g_n est intégrable sur $[0; 1]$ et u_n est bien définie.

2. On pose $x = 1 - h$.

$$\begin{aligned} (1-x) \ln(1-x^{n+1}) &= h \ln(1 - (1-h)^{n+1}) = h \ln(1 - (1 - (n+1)h + o(h))) \\ &= h \ln((n+1)h + o(h)) = h (\ln(h) + \ln(n+1 + o(1))) \\ &= h \ln(h) + h \ln(n+1 + o(1)) \end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x) \ln(1-x^{n+1})] = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u(x) = 1 - x, \quad u'(x) = -1$$

$$v'(x) = \frac{x^n}{1-x^{n+1}}, \quad v(x) = -\frac{1}{n+1} \ln(1-x^{n+1})$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; 1[$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0$: l'intégration par parties est justifiée.

Comme $v(0) = 0$, on peut écrire directement :

$$u_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

4. (a) On fait le changement de variable de classe \mathcal{C}^1 (sur $]0; 1[$) strictement croissant $x = u^{1/(n+1)}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &= -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-u) \frac{1}{n+1} u^{1/(n+1)-1} du \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{1-1/(n+1)}} du \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } h_n \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} = \ln(1-u) \exp\left(-\frac{n}{n+1} \ln(u)\right) \end{cases}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $]0; 1[$.

- La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers $h \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{u} \end{cases}$

- La fonction h est continue sur $]0; 1[$.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{n+1} \leq 1$$

On multiplie par $-\ln(u) \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in]0; 1[\quad -\frac{n}{n+1} \ln(u) \leq -\ln(u)$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall u \in]0; 1[\quad |h_n(u)| = -h_n(u) \leq \frac{-\ln(1-u)}{u} = -h(u)$$

avec $-h$ continue, positive et intégrable sur $]0; 1[$:

$$-h(u) \xrightarrow[u > 0]{u \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1-u} \xrightarrow[u < 1]{u \rightarrow 1} 0$$

D'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{n/(n+1)}} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I = \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du$.

Mais la fonction h est continue, négative et non constante nulle donc $I < 0$.

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{donc} \quad u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^2} \quad \text{avec} \quad K = -I > 0.$$

$$5. (a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^{n+1} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx \leq \int_0^1 x^n \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx = u_n$$

D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx$ converge.

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad \sum_{k=0}^n x^k \geq (n+1)x^n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)x^n} = \frac{x}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Cette inégalité est triviale pour $x = 0$ et il y a égalité pour $x = 1$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_{\infty} = \frac{1}{n+1}.$$

$\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0; 1]$.

Exercice 13 (Mines 2019)

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{1+x^n}}.$$

Correction

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ soit } f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{1+x^n}} \end{cases}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+ .
- La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x \leq 1 \\ x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

En effet si $x < 1$:

$$\sqrt[n]{1+x^n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(x^n + o(x^n))\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Si } x = 1, \sqrt[n]{1+x^n} = \sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{\ln(2)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Si $x > 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1+x^n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1+x^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\right)\right) \\ &= x \exp\left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[n]{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

- f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}_+ |f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}} = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 14 (X 2018)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Limite de $I_n = n \int_0^1 t^n f(t) dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Il n'y a pas de problème de définition de l'intégrale : fonction continue sur une segment.

On fait le changement de variable $t = x^{1/n}$ ou $x = t^n$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n &= n \int_0^1 x f(x^{1/n}) \frac{1}{n} x^{1/n-1} dx \\ &= \int_0^1 x^{1/n} f(x^{1/n}) dx \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{1/n} f(x^{1/n}) \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue (par morceaux) sur $[0; 1]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers $g \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(1) \text{ si } x \in]0; 1] \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$.

- La fonction g est continue par morceaux sur $[0; 1]$.

- L'hypothèse de domination est vérifiée.

f est continue sur le segment $[0; 1]$ donc :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq M$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; 1] \quad |f_n(x)| \leq M$$

avec $x \mapsto M$ continue, positive et intégrable sur $[0; 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(x) dx = f(1).$$

Exercice 15 (Centrale 2022)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_{1/n}^{4/n} \left(1 + \sin \left(\frac{u}{n} \right) \right)^n \exp \left(\sqrt{\frac{n^2 u}{n+1}} \right) du \right)$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n \int_{1/n}^{4/n} \left(1 + \sin \left(\frac{u}{n} \right) \right)^n \exp \left(\sqrt{\frac{n^2 u}{n+1}} \right) du$.

L'intégrale ne pose aucun problème de définition : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

On fait le changement de variable $t = nu$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \int_1^4 \left(1 + \sin \left(\frac{t}{n^2} \right) \right)^n \exp \left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) dt.$$

Le candidat a traité la suite de l'exercice avec le théorème de convergence dominée. L'examinateur lui a demandé ensuite d'utiliser la convergence uniforme.

Le début est le même pour les deux méthodes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [1; 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(1 + \sin \left(\frac{t}{n^2} \right) \right)^n \exp \left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}} \right) \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[1; 4]$.

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[1; 4]$ vers la fonction $f \begin{cases} [1; 4] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\sqrt{t}} \end{cases}$:

Soit $t \in [1; 4]$.

$$1 + \sin \left(\frac{t}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad 1 + \sin \left(\frac{t}{n^2} \right) > 0$$

$$\forall n \geq n_0 \quad f_n(t) = \exp \left(n \ln \left(1 + \sin \left(\frac{t}{n^2} \right) \right) \right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}}$$

On en déduit quand n tend vers $+\infty$:

$f_n(t) = \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) + \sqrt{t} + o(1)$
et on conclut facilement.

• **Utilisation du théorème de convergence dominée**

— La fonction f est continue sur $[1; 4]$.

— **Domination**

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad 0 \leq \frac{t}{n^2} \leq \frac{4}{2^2} \leq 1 \leq \pi$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad \sin\left(\frac{t}{n^2}\right) \geq 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t)| = f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}}$$

Par concavité de \ln :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t)| \leq \exp\left(n \sin\left(\frac{t}{n^2}\right) + \sqrt{t}\right)$$

Par concavité de \sin sur $[0; \pi]$:

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t)| \leq \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right) + 2\right) = \exp\left(\frac{t}{n} + 2\right) \leq e^4$$

avec $t \mapsto e^4$ continue, positive et intégrable sur $[1; 4]$.

• **Utilisation de la convergence uniforme**

Il s'agit de montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[1; 4]$.

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad 0 \leq \frac{t}{n^2} \leq \frac{4}{2^2} \leq 1 \leq \pi$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad \sin\left(\frac{t}{n^2}\right) \geq 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t) - f(t)| = \left| \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} - \exp(\sqrt{t}) \right|$$

On en déduit pour tout $n \geq 2$ et tout $t \in [1; 4]$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \left| \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) + \sqrt{\frac{nt}{n+1}} - \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) + \sqrt{t}\right) \right| \\ &\quad + \left| \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) + \sqrt{t}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\leq \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left| \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) - 1 \right| \\ &\leq \exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left(\exp\left(n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit par concavité de \ln :

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left(\exp\left(n \sin\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

On en déduit par concavité de \sin sur $[0; \pi]$:

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leq \exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| \\ &\quad + \exp(\sqrt{t}) \left(\exp\left(n\left(\frac{t}{n^2}\right)\right) - 1 \right) \\ &\leq \exp\left(\frac{t}{n}\right) \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| + \exp(\sqrt{t}) \left(\exp\left(\frac{t}{n}\right) - 1 \right) \\ &\leq e^2 \left| \exp\left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}}\right) - \exp(\sqrt{t}) \right| + e^2 \left(\exp\left(\frac{4}{n}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall (x, y) \in [0; 2]^2 \quad |e^x - e^y| \leq e^2 |x - y|$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad \forall t \in [1; 4] \quad |f_n(t) - f(t)| &\leq e^4 \left(\left| \sqrt{\frac{nt}{n+1}} - \sqrt{t} \right| + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq e^4 \left(\left| \frac{\frac{nt}{n+1} - t}{\sqrt{\frac{nt}{n+1}} + \sqrt{t}} \right| + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq e^4 \left(\frac{t}{(n+1) \left(\sqrt{\frac{nt}{n+1}} + \sqrt{t} \right)} + \frac{4}{n} \right) \\ &\leq 4e^4 \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{8e^4}{n} \text{ indépendant de } n \text{ et } \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Quelque soit la méthode, on trouve que (u_n) converge vers $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ qu'il n'y a plus qu'à calculer.

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt &= \int_1^2 e^x 2x dx \text{ changement de variable } t = x^2 \\ &= 2 \left([x e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) \\ &= 2 \left(2e^2 - e - (e^2 - e) \right) \\ &= 2e^2 \end{aligned}$$

Exercice 16 (*Mines 2019*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = n \int_1^{1+1/n} f(x^n) dx$.

Etudier la suite (u_n) .

Variante 2023

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue.

Donner un équivalent de $A_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t^n) dt$.

Correction

La suite ne pose pas de problème de définition : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

On fait le changement de variable $x = y^{1/n}$.

$$u_n = \int_1^{b_n} f(y)y^{1/n-1} dy \text{ avec } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$b_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \text{ car } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \frac{1}{n} = 1 \text{ donc } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$\forall n \geq 1 \ln(b_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$: faire l'étude de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ pour justifier l'inégalité stricte

$\forall n \in \mathbb{N}^* b_n < e$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(y)y^{1/n-1} \text{ si } y \leq b_n \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > b_n \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.
- Soit $y < e$
 $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ donc $y < b_n$ APCR.

$$\text{Donc } f_n(y) = f(y)y^{1/n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{y}$$

Soit $y \geq e$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* b_n < y$

$$\text{Donc } f_n(y) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement, la suite de fonction (f_n) converge simplement vers $g \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{f(y)}{y} \text{ si } y < e \\ y \mapsto 0 \text{ si } y \geq e \end{cases}$.

- g est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$.
- **Hypothèse de domination**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $y \leq b_n$:

$$|f_n(y)| = |f(y)| y^{1/n-1} \text{ avec } y \geq 1 \text{ et } \frac{1}{n} - 1 \leq 0 \text{ donc :}$$

$$|f_n(y)| \leq |f(y)|$$

Si $y > b_n$:

$$|f_n(y)| = 0 \leq |f(y)|$$

On peut donc dominer par :

$$\varphi \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto |f(y)| \text{ si } y < e \\ y \mapsto 0 \text{ si } y > e \end{cases}.$$

D'après le théorème de convergence dominée :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^e \frac{f(y)}{y} dy$$

Exercice 17 (Centrale 2018, 2024)

Soit $\alpha > 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt$$

1. Existence de I_n .
2. Relation entre I_{n+1} et I_n .
3. Limite de I_n ?
4. Equivalent de I_n ?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}}$ avec $n\alpha > 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

2. On procède à une intégration par parties.

$$u(t) = (t^\alpha + 1)^{-n}, \quad u'(t) = -n\alpha t^{\alpha-1} (t^\alpha + 1)^{-n-1}$$

$$v'(t) = 1, \quad v(t) = t$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

$$u(t)v(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} t^{1-n\alpha} \text{ avec } 1 - n\alpha < 1 - n \leq 0 \text{ donc } u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Donc l'intégration par parties est justifiée.

De plus $u(0)v(0) = 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^{+\infty} t(-n)\alpha t^{\alpha-1} (t^\alpha + 1)^{-n-1} dt = n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(t^\alpha + 1)^{n+1}} dt = n\alpha(I_n - I_{n+1})$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} I_n$$

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ .

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \end{cases}$.
- f est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ |f_n(t)| = \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \leq \frac{1}{t^\alpha + 1} = f_1(t)$$

avec f_1 continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$

4. • **Première méthode** : on utilise la deuxième question.

$$\begin{aligned} \ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) = -\frac{1}{n\alpha} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \ln(I_n) - \ln(I_1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(I_{k+1}) - \ln(I_k)) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + l_1 + o(1) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \ln(n) + l_2 + o(1) \text{ mais il faut détailler et parler de la constante d'Euler} \\ \ln(I_n) &= \ln(n^{-1/\alpha}) + l_3 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_n \sim \frac{C}{n^{1/\alpha}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}_+^*$$

- **Deuxième méthode** : on utilise un changement de variable.

Des considérations habituelles ou du calcul précédent, il ressort qu'il est opportun de faire le changement de variable : $x = n^{1/\alpha}t$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha/n + 1)^n} dx \\ &= \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)\right) dx \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée.

Il ressort du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+ \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^n \geq 1 + x^\alpha$$

$$I_n \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$$

Variante

Exercice 18 (Mines 2021)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose : $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle définie à partir d'un certain rang ?
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
4. Equivalent de u_n ?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \end{cases}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}}$

Si $\alpha \leq 0$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n\alpha \leq 0 \leq 1$$

donc f_n n'est jamais intégrable sur $[1; +\infty[$.

f_n étant positive, I_n ne peut pas être une intégrale semi-convergente.

I_n n'est définie pour aucun $n \in \mathbb{N}$.

Si $\alpha > 0$ alors à partir d'un certain rang $n\alpha > 1$ et f_n est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par ailleurs, f_n est intégrable sur $]0; 1]$ car f_n est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$)

Les nombres α cherchés sont donc les réels strictement positifs.

2. Soit $\alpha > 0$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\alpha > 1$.

- Pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ .

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 1 \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \end{cases}$.

- f est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(t)| = \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} \leq \frac{1}{(t^\alpha + 1)^{n_0}} = f_{n_0}(t)$$

avec f_{n_0} continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de convergence dominée, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$

3. Soit $\alpha > 0$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\alpha > 1$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n = \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0}} \frac{1}{1 - 1/(1+t^\alpha)} = \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha}$$

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^\alpha}$$

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{n_0\alpha}} \text{ avec } n_0\alpha > 1$$

Donc :

$t \mapsto \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si $\alpha < 1$

- **Premier cas :** $\alpha < 1$

$$\begin{aligned} \forall N \geq n_0 \quad \sum_{n=n_0}^N u_n &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=n_0}^N \left(\frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n \right) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^\alpha} \right)^n \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n_0-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\sum u_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée donc elle converge.

• **Deuxième cas : $\alpha \geq 1$**

On suppose que la série de terme général u_n converge.

— Pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^- .

— La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

— $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* .

— La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = u_n$ converge.

D'après le théorème N_1 , $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ : c'est absurde donc la série de terme général u_n diverge.

4. On fait le changement de variable : $x = n^{1/\alpha}t$.

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^\alpha + 1)^n} dt = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^\alpha/n + 1)^n} dx \\ &= \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)\right) dx \end{aligned}$$

On applique le théorème de convergence dominée.

Il ressort du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left(1 + \frac{x^\alpha}{n}\right)^n \geq 1 + x^\alpha$$

$$u_n \sim \frac{1}{n^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$$

ce qui permet de retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 19 (*Mines 2016*)

Limite de $\int_0^n \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$?

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \leq n \\ x \mapsto 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+ .

• (f_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$.

En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $x < n$.

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 \quad f_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n\left(-\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

- f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- **Domination**

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; n[\quad 0 \leq f_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} + n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\
 &\leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(x + \frac{x}{n^2} - x\right) \text{ inégalité classique : } \forall t > -1 \quad \ln(1+t) \leq t \\
 &\leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(\frac{x}{n^2}\right) \leq \frac{1}{1+x^2} \exp\left(\frac{n}{n^2}\right) \\
 &\leq \frac{e}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

C'est trivial pour $x \geq n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f_n(x)| \leq \frac{e}{1+x^2}$$

avec $x \mapsto \frac{e}{1+x^2}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^n \frac{e^{(1+1/n^2)x}}{1+x^2} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 20 (Mines PSI 2013)

1. Comparer $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Correction

1. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \end{cases}$.

f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

De plus $t^{3/2}f(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $t^{1/2}f(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{1/2}(\ln t)^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$.

Classiquement, on ne déduit que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt &= \int_{+\infty}^1 \frac{(-\ln x)^2}{1+1/x^2} \frac{-dx}{x^2} \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \searrow \swarrow t = \frac{1}{x} \\
 &= \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx
 \end{aligned}$$

2. On a donc $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto (-1)^n t^{2n} (\ln t)^2 \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0; 1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $]0; 1[$:
 $t^{1/2}f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ et f_n est prolongeable par continuité en 1

- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \end{cases}$ est continue.
- La série de terme général $\int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 |f_n(t)| dt &= \int_0^1 t^{2n} (\ln t)^2 dt \\
 &= \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} (\ln t)^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{2 \ln t}{t} dt \quad \text{IPP facile à justifier} \\
 &= -\frac{2}{2n+1} \int_0^1 t^{2n} \ln t dt \\
 &= -\frac{2}{2n+1} \left(\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{t} dt \right) \\
 &= \frac{2}{(2n+1)^2} \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{2}{(2n+1)^3}
 \end{aligned}$$

et il est clair à ce stade de l'exercice que la série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^3}$ converge (au besoin il suffit d'en prendre un équivalent).

On peut donc appliquer le théorème N1 et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt &= 2 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} (\ln t)^2 dt \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{(2n+1)^3} \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}
 \end{aligned}$$

Exercice 21 (Mines 2018)

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$

Correction

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} &= \frac{x}{e^{2x}} \frac{1}{1 - e^{-3x}} \\
 &= \frac{x}{e^{2x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-3x})^n \quad \text{car } e^{-3x} \in]-1; 1[\\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-(3n+2)x}
 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x e^{-(3n+2)x} \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* :
 $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x^2 f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur \mathbb{R}_+^* et sa somme
 $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} \end{cases}$ est continue.
- La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-(3n+2)x} dx \\ &= \left[x \frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} dx \\ &\quad \text{IPP facile à justifier} \\ &= \frac{1}{3n+2} \int_0^{+\infty} e^{-(3n+2)x} dx = \frac{1}{3n+2} \left[\frac{e^{-(3n+2)x}}{-(3n+2)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{(3n+2)^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \sim \frac{1}{9n^2} \geq 0 \text{ donc la série de terme général } \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \text{ converge.}$$

On peut donc appliquer le théorème N1 et :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 22 (Mines 2018)

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $\int_1^{+\infty} f(t) dt$.

Correction

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

$|f_k(x)| \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $f_k(x)$ converge absolument.

Donc la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de \mathbb{R}_+^* :
Soit $[a; b]$ ($0 < a < b$) un segment inclus dans \mathbb{R}_+^* .
 $\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in [a; b] \quad |f_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(a+k)^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.
 f est donc continue sur \mathbb{R}_+^* .

On peut aussi procéder ainsi :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{R}_+^* :
 $\forall k \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |f_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{k^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

Donc la fonction $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . f_0 étant continue sur \mathbb{R}_+^* , $f = f_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Une toute autre méthode est possible :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

La série $\sum_{k \geq 0} f_k(x)$ est alternée et la suite $(|f_k(x)|)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(x+k)^2} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante

et converge vers 0 donc la série de terme général $f_k(x)$ converge.

Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

De plus :

$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ indépendant de x et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+^* .

Donc la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+^* .

Les f_k étant toutes continues sur \mathbb{R}_+^* , il en résulte que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- $\sum f_k(x)$ est une série alternée.
- $f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$
- La suite $(|f_k(x)|)$ est décroissante.

Donc :

$$|f(x)| \leq |f_0(x)| = \frac{1}{x^2}$$

Donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

3. Le théorème N1 ne s'appliquera pas.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx &= \sum_{k=0}^n \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-1)^{k+1}}{x+k} \right]_1^{+\infty} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer $\int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx \right| = \left| - \int_1^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} dx \right|$$

On peut avoir recours au théorème de convergence dominée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est continue sur $[1; +\infty[$: $R_n = f - \sum_{k=0}^n f_k$
- La suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[1; +\infty[$ vers la fonction nulle.
- La fonction nulle est continue.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [1; +\infty[\quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

avec $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ continue, positive et intégrable sur $[1; +\infty[$.

Mais le recours au théorème de convergence dominée n'est pas indispensable :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx \right| &\leq \int_1^{+\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} \right| dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+n+1)^2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Exercice 23 (*X 2021, 50 minutes de passage*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Nature de la série $\sum u_n$?
3. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ en fonction de u_1 .

Correction

1. On va appliquer le théorème de convergence dominée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{(1+t^4)^n} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto 0 \text{ si } t > 0 \\ 0 \mapsto 1 \end{cases}$

- La fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ |f_n(t)| = \frac{1}{(1+t^4)^n} \leq \frac{1}{1+t^4} = f_1(t)$$

avec f_1 continue par morceaux positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ : $f(t) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^4} \right)$.

On en déduit :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

Remarque

Dans la mesure où (u_n) est à valeurs positives, on peut chercher à majorer u_n .

Pour cela, il faut minorer $(1+t^4)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ (1+t^4)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{4k} \geq \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} t^{4k} = 1 + nt^4$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \mathbb{R}_+ 0 \leq \frac{1}{(1+t^4)^n} \leq \frac{1}{1+nt^4}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+nt^4}$ est intégrable en $+\infty$: $\frac{1}{1+nt^4} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{nt^4}$ avec $4 > 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini (par contre $u_0 = \int_0^{+\infty} dt$ ne l'est pas) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq u_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+nt^4}$$

On fait alors le changement de variable $t = n^{-1/4}x$ (pour avoir $nt^4 = x^4$) : $\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq$

$$u_n \leq \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

ce qui permet de montrer que (u_n) converge vers 0 et que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

2. On essaie d'abord d'intuiter le résultat :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &\stackrel{=?}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} \frac{1}{1 - 1/(1+t^4)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = +\infty \end{aligned}$$

On cherche donc à montrer que la série de terme général u_n diverge.

On raisonne par l'absurde en utilisant le théorème N1 : on suppose que la série de terme

général u_n converge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (découle de la domination dans la question précédente).
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{1}{1+t^4} \frac{1}{1-1/(1+t^4)} = \frac{1}{t^4}$$

- La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ converge :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = u_n$$

D'après le théorème N1, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

C'est absurde donc la série de terme général u_n est divergente.

Remarque

On peut aussi chercher à minorer u_n .

Pour cela, il faut majorer $(1+t^4)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (1+t^4)^n = e^{n \ln(1+t^4)} \leq e^{nt^4}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt^4} dt = \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{n^{1/4}}$$

ce qui permet d'affirmer que la série de terme général u_n est divergente.

3. D'après l'énoncé la série $\sum \frac{u_n}{n}$ converge. Néanmoins, on peut intuitiver sa nature comme à la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &\stackrel{=?}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+t^4} \right)^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} -\ln \left(1 - \frac{1}{1+t^4} \right) dt = \int_0^{+\infty} (\ln(1+t^4) - 4 \ln(t)) dt \end{aligned}$$

Mais la fonction $F : t \mapsto \ln(1+t^4) - 4 \ln(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* :

- elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- \ln étant intégrable sur $]0; 1]$, F est intégrable sur $]0; 1]$
- $F(t) = \ln \left(1 + \frac{1}{t^4} \right) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4}$ donc F est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Donc on intuite que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

• Première méthode

On commence par montrer que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1+t^4} = -\ln \left(1 - \frac{1}{1+t^4} \right) = \ln(1+t^4) - 4 \ln(t)$$

On en déduit que la fonction $F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{n}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* :

- elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- \ln étant intégrable sur $]0; 1]$, F est intégrable sur $]0; 1]$
- $F(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^4}$ donc F est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N \frac{u_n}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{f_n(t)}{n} dt \leq \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{n} dt \in \mathbb{R}$$

La série de terme général $\frac{u_n}{n}$ étant à termes positifs, on en déduit qu'elle converge.

On montre alors facilement qu'on peut appliquer le théorème N1 :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f_n}{n}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f_n}{n}$ est intégrable par morceaux sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall t > 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right)$$

- La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n}{n}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de terme général $\int_0^{+\infty} \left| \frac{f_n(t)}{n} \right| dt$ converge :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{f_n(t)}{n} \right| dt = \frac{u_n}{n}$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right) dt$$

On fait ensuite une intégration par parties :

$$u(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right), \quad u'(t) = \frac{-4}{t^5} \frac{1}{1 + t^{-4}}$$

$$v'(t) = 1, \quad v(t) = t$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$u(t)v(t) = t(\ln(1 + t^4) - 4 \ln(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

$$u(t)v(t) \sim_{+\infty} t \times \frac{1}{t^4} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

L'intégration par parties est donc justifiée.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^4}\right) dt &= - \int_0^{+\infty} t \left(\frac{-4}{t^5} \frac{1}{1 + t^{-4}} \right) dt \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4} \frac{1}{1 + t^{-4}} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4} \\ &= 4u_1 \end{aligned}$$

Remarque

Si dans la première question, on a majoré u_n , on peut passer la première étape du raisonnement et appliquer directement le théorème N1.

• Deuxième méthode

On fait une intégration par parties dans l'intégrale définissant u_n :

$$u(t) = (1 + t^4)^{-n}, u'(t) = (-n)(4t^3)(1 + t^4)^{-n-1}$$

$$v'(t) = 1, v(t) = t$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0 \text{ ou } +\infty]{} 0$

L'intégration par parties est donc justifiée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 4n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1 + t^4)^{n+1}} dt = 4n \int_0^{+\infty} \frac{t^3 + 1 - 1}{(1 + t^4)^{n+1}} dt$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_n}{n} = 4(u_n - u_{n+1})$$

On a montré que la suite (u_n) convergeait donc le lien suite-série permet d'affirmer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

On en déduit que la série de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} = 4(u_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = 4u_1$$

Exercice 24 (Centrale 2015, planche complète)

$$I_n = \int_0^1 t^{nt} dt$$

1. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Ecrire I_n sous forme de somme.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{nt} = e^{nt \ln t} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0; 1]$.

- (f_n) converge simplement sur $]0; 1]$ vers $f \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \in]0; 1[\mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$.

- f est continue par morceaux sur $]0; 1]$.

• Domination

$$\forall t \in]0; 1] \quad \forall n \geq 1 \quad |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue, positive et intégrable sur $]0; 1]$.

On en déduit que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. **On fixe** $n \in \mathbb{N}$.

On prolonge f_n par continuité en posant $f_n(0) = 1$.

$$\text{Soit } h \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ 0 \mapsto 0 \\ t \neq 0 \mapsto t \ln t \end{cases} \quad \text{de sorte que :}$$

$$\forall t \in [0; 1] \quad f_n(t) = e^{nh(t)}$$

On observera que h est continue sur le segment $[0; 1]$. Elle y est donc bornée.

$$\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ soit } g_p = \frac{(nh)^p}{p!}.$$

- $\forall p \in \mathbb{N}$ g_p est continue sur $[0; 1]$.

- La série de fonctions $\sum_{p \geq 0} g_p$ converge normalement sur $[0; 1]$:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|g_p\|_{\infty} = \frac{(n \|h\|_{\infty})^p}{p!}$$

- $f_n = \sum_{p=0}^{+\infty} g_p$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} \int_0^1 t^p \ln^p t dt \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} (-1)^p \frac{p!}{(p+1)^{(p+1)}} \quad \text{IPP successives} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p n^p}{(p+1)^{(p+1)}} \end{aligned}$$

Exercice 25 (Mines 2022)

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n+2}{(2n+1)^2 + x^2}$$

Correction

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\cos(xt)}{\cosh(t)} &= \frac{2 \cos(xt)}{e^t + e^{-t}} = \frac{2 \cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cos(xt) e^{-(2n+1)t} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto (-1)^n \cos(xt) e^{-(2n+1)t} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* :
 $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |f_n(t)| \leq e^{-(2n+1)t}$
avec $t \mapsto e^{-(2n+1)t}$ intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

•

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= (-1)^n \Re e \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-(2n+1))t} dt \right) \\ &= (-1)^n \Re e \left(\left[\frac{e^{(ix-(2n+1))t}}{ix - (2n+1)} \right]_0^{+\infty} \right) \\ &= (-1)^n \Re e \left(\frac{1}{2n+1 - ix} \right) \\ &= (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = \left| \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$$

Donc la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ diverge et le théorème N1 ne s'applique pas.

On revient donc aux sommes partielles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} &= \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^N f_n(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\cos(xt) e^{-t} \sum_{n=0}^N (-e^{-2t})^n \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} \frac{1 + (-1)^N e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \end{aligned}$$

La fonction $g : t \mapsto \frac{\cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |g(t)| \leq e^{-t}.$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{(-1)^N \cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

On peut donc séparer les intégrales et écrire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-t}}{1 + e^{-2t}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^N \cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + e^{-t}} dt + (-1)^N \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \end{aligned}$$

Pour conclure, on n'a pas besoin du théorème de convergence dominée :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t} dt = \frac{1}{2(N+1)}$$

Exercice 26 (Mines 2013)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}} dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie. Déterminer la limite de (I_n) .
2. Nature de la série de terme général I_n ?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

f_n est continue sur $]0; 1[$.

$t^{1/2} f_n(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} t^{n+1/2} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$: classiquement, on en déduit que f_n est intégrable sur $]0; 1/2]$.

On cherche ensuite à préciser le comportement de f_n en 1.

On pose $t = 1 - h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= (1-h)^n \ln(1-h)(1-(1-h)^2)^{-1/4} \\ &= (1-h)^n \ln(1-h)(2h-h^2)^{-1/4} \\ &= \ln(1-h)h^{-1/4}(2-h)^{-1/4}(1-h)^n \\ &\sim -h^{3/4}2^{-1/4} \end{aligned}$$

Donc $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} 0$: f est prolongeable par continuité en 1.
 f_n est donc intégrable sur $]0; 1[$.

On applique ensuite le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $]0; 1[$.
- La suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; 1[$.
- La fonction nulle est continue.
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall t \in]0; 1[\quad |f_n(t)| = \frac{t^n |\ln t|}{\sqrt[4]{1-t^2}} \leq \frac{|\ln t|}{\sqrt[4]{1-t^2}} = |f_0(t)|$$

avec $|f_0|$ continue, positive et intégrable sur $]0; 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. La fonction $g \begin{cases}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{-\ln t}{(1-t)\sqrt[4]{1-t^2}} = \frac{-\ln t}{(1-t)^{5/4}(1+t)^{1/4}} \end{cases}$ est continue sur $]0; 1[$.

De plus $t^{1/2}g(t) \sim_{t \rightarrow 0^+} -t^{1/2} \ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$: classiquement, on en déduit que g est intégrable sur $]0; 1/2[$.

On cherche ensuite à préciser le comportement de g en 1.

On pose $t = 1 - h$ avec $h \rightarrow 0^+$.

$$g(t) = -\ln(1-h)h^{-5/4}(1+1-h)^{-1/4} \sim h^{-1/4}2^{-1/4} = \frac{1}{2^{1/4}} \frac{1}{(1-t)^{1/4}}$$

Donc g est intégrable sur $]0; 1[$.

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^N (-I_n) &= \sum_{n=0}^N \int_0^1 \frac{t^n (-\ln t)}{(1-t^2)^{1/4}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^N \frac{t^n (-\ln t)}{(1-t^2)^{1/4}} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{-\ln t}{(1-t^2)^{1/4}} \frac{1-t^{N+1}}{1-t} dt = \int_0^1 (1-t^{N+1})g(t) dt \\ &\leq \int_0^1 g(t) dt \text{ car } g \text{ est positive} \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles de la série de terme général $-I_n$ est donc majorée. Mais c'est une série à termes positifs donc elle converge.

Finalement la série de terme général I_n converge.

Remarque

On peut alors facilement appliquer le théorème N1.

Exercice 27 (Centrale 2023)

1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction f de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - f(x+1) = \frac{1}{x^3} \end{cases}$$

2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

3. Montrer que f est intégrable sur $[1; +\infty[$ et donner $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Correction

1. On procède par analyse-synthèse.

On suppose que f existe.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x) - f(x+n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(x+k) - f(x+k+1)) \quad \text{téléscopage} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(x+k)^3} \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^3}$$

D'où l'unicité en cas d'existence.

Réciproquement pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(x+n)^3} \end{cases}$ (qui est bien définie sur \mathbb{R}_+^* en entier).

Soit $x > 0$ fixé.

$f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3}$, tout est positif et la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ converge. On en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ converge.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur \mathbb{R}_+^* . Sa somme, notée f dans la suite, est donc une fonction définie sur \mathbb{R}_+^* .

$\forall x \in [1; +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[1; +\infty[$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (théorème de la double limite).

Enfin :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1+n)^3} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} \\ &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

D'où l'existence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $a > 0$.

$\forall x \in [a; +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| = \frac{1}{(x+n)^3} \leq \frac{1}{(n+a)^3}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

On en déduit que f est continue sur $[a; +\infty[$.

Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur $[1; +\infty[$.
 • La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[1; +\infty[$ et sa somme (f) est continue.
 • La série de terme général $\int_1^{+\infty} |f_n(x)| dx$ converge.

En effet :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+n)^2} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

D'après le théorème N1, f est intégrable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \int_1^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

5 Dérivation

Exercice 28 (Centrale 2019)

Pour $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 .

2. On admet $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.

Donner un équivalent de φ en 0^+ .

Quelle est la limite de φ en $+\infty$?

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
 $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \quad f'_n(x) = -\sqrt{n} e^{-nx}$
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* :
 Soit $x_0 > 0$.
 $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq f_n(x_0) \leq e^{-nx_0} = (e^{-x_0})^n$ avec $|e^{-x_0}| < 1$
 - La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* :
 Soit $[a, b]$ un tel segment ($0 < a < b$).
 $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [a, b] \quad |f'_n(x)| \leq \sqrt{n} e^{-na}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente (utiliser la règle de d'Alembert)
- Donc φ est \mathcal{C}^1 .

2. On fixe $x > 0$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $]0; 1]$ (en plus de $[1; +\infty[$) ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

On en déduit :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \varphi(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

On fait alors le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement croissant $t = \frac{s}{x}$.

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$$

$$\text{puis } \varphi(x) \sim_{0+} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

La comparaison d'une série à une intégrale donne aussi :

$$0 \leq \varphi(x) \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq e^{-x} + \int_1^{+\infty} e^{-xt} dt \leq e^{-x} + \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = e^{-x} + \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc } \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 29 (Centrale 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{(x+n)^2} \end{cases}$.

Soit $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
4. f est-elle \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ ?

Correction

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé.
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq f_n(x_0) \leq \frac{1}{n^2}$

Donc $\sum f_n(x_0)$ converge.
 f est donc définie sur \mathbb{R}_+ .

$$2. \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leq f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'_n(x) = -\frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} - \frac{2 e^{-nx}}{(x+n)^3}$$

• $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .

• $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .
 Soit $[a; b]$ un tel segment.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |f'_n(x)| \leq \frac{e^{-nx}}{n} + \frac{2}{n^3}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [a; b] \quad |f'_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n} + \frac{2}{n^3} = u_n \text{ indépendant de } x.$$

La série de terme général u_n converge car :

$$n^2 u_n = n e^{-na} + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

$$4. \forall x > 0 \quad f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(x+n)^3}$$

Supposons $f \in \mathcal{C}^1$ sur \mathbb{R}_+ .

$$f'(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} f'(0) = l_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } g_n \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{(x+n)^3} \end{cases}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |g_n(x)| = g_n(x) \leq \frac{1}{n^3}$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit la continuité de $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -l_1 - 2g(0) = l \in \mathbb{R}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sum_{n=1}^N \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{(x+n)^2}$$

On fait tendre x vers 0^+ :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq l \in \mathbb{R}$$

On en déduit que la série harmonique converge (série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée).

C'est absurde donc f n'est pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 30 (Mines 2018)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue.
2. Montrer que f est dérivable et croissante.
3. Limite de f et de f' en $+\infty$.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur \mathbb{R} .
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} :

Les accroissements finis donnent :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|.$$

Soit $[a; b]$ un segment de \mathbb{R} ($a < b$).

Soit $c = \max(|a|, |b|)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [a; b] \quad |f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{c}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a; b]$.

On en déduit que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$$

- $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .
- $\sum f'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} \quad |f'_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} > 0$$

f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. Une comparaison série intégrale donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f'(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \left[\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$$

Donc $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

f est croissante donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \overline{\mathbb{R}}$

Supposons l fini.

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum_{n=1}^N f_n(x) \leq f(x) \leq l$$

On fait tendre x vers $+\infty$:

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N \frac{\pi}{2n} \leq l < +\infty$$

On en déduit que la série harmonique diverge, ce qui est absurde.

Donc : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Exercice 31 (*Mines 2019*)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-kx})$$

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .
3. Limite de f en $+\infty$?
4. $f(\mathcal{D}_f)$?

Correction

1. Si $x < 0$, $\ln(1 + e^{-kx}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$: la série de terme général $\ln(1 + e^{-kx})$ diverge grossièrement.

Si $x = 0$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \ln(1 + e^{-kx}) = \ln(2)$$

De nouveau, la série de terme général $\ln(1 + e^{-kx})$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, $e^{-kx} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$$\ln(1 + e^{-kx}) \sim e^{-kx} = (e^{-x})^k \text{ avec } e^{-x} < 1.$$

Tout est positif donc on peut utiliser l'équivalent pour conclure : la série de terme général $\ln(1 + e^{-kx})$ converge.

Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1 + e^{-kx}) \end{cases}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est \mathcal{C}^1 et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'_k(x) = \frac{-k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}}$$

- La série de fonctions de terme général f_k converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
- La série de fonctions de terme général f'_k converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de \mathbb{R}_+^* :

Soit $[a; b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* ($0 < a < b$)

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a; b] \quad |f'_k(x)| = \frac{k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} \leq k e^{-ka} \text{ indépendant de } x \text{ et terme général d'une série convergente :}$$

$$- \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad k e^{-ka} > 0$$

$$- \quad \frac{(k+1) e^{-(k+1)a}}{k e^{-ka}} = \frac{k+1}{k} e^{-a} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{-a} < 1$$

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition et :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} = - \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{e^{-kx}}{1 + e^{-kx}}$$

3. Le terme pour $k = 0$ vaut $\ln(2)$.

$$\forall x > 0 \quad \ln(2) \leq f(x) \leq \ln(2) + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx} = \ln(2) + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

Donc la limite cherchée est $\ln(2)$.

$$4. \forall x > 0 \quad f'(x) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} < 0 :$$

f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

f a donc une limite (finie ou infinie) en 0. On la note l .

Le théorème de la bijection donne alors $f(\mathcal{D}_f) =]\ln(2); l[$.

Supposons l finie.

$$\forall x > 0 \quad f(x) < l$$

et :

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx}) \leq f(x)$$

On en déduit :

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx}) \leq l$$

On fixe n dans \mathbb{N} et on fait tendre x vers 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \ln(2) < l$$

On en déduit $l = +\infty$.

Exercice 32 (Mines 2018)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition.
- Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+ et exprimer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ comme somme d'une série convergente.

Correction

On note $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$$

$$\text{et } a_n \sim \frac{\pi}{2^n}.$$

- On fixe $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \pi \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \text{ et tout est positif donc :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ converge} &\iff \sum_{n \geq 0} \pi \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \text{ converge} \\ &\iff \frac{e^{-x}}{2} < 1 \iff e^{-x} < 2 \\ &\iff -x < \ln(2) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_f =]-\ln(2); +\infty[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases}]-\ln(2); +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in] -\ln(2); +\infty[\quad f'_n(x) = -n e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $] -\ln(2); +\infty[$.
- La série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de $] -\ln(2); +\infty[$: Soit $[a; b]$ ($-\ln(2) < a < b$) un segment inclus dans $] -\ln(2); +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in [a; b] \quad |f'_n(x)| = n e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \leq n a_n e^{-na} \text{ indépendant de } x.$$

$$n a_n e^{-na} \sim n \pi \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n \text{ et tout est positif donc la série de terme général } n a_n e^{-na} \text{ est}$$

$$\text{de même nature que la série de terme général } v_n = n \pi \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{n} \frac{e^{-a}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-a}}{2} < \frac{e^{\ln(2)}}{2} = 1$$

Par la règle de d'Alembert, la série de terme général v_n converge.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a; b]$.

Donc f est \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition.

3. On remarque que la fonction f_0 est la fonction nulle. Donc en fait $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ :
 $n > 0$ donc $x \mapsto e^{-nx}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ et sa somme est continue sur \mathbb{R}_+ : cf les deux premières questions.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx = \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

On en déduit que la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(x)| \, dx$ converge :

$$\frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sim \frac{\pi}{2^n n} \text{ et tout est positif.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \frac{\pi}{2^n n} > 0$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général w_n converge.

D'après le théorème N1 f est intégrable sur \mathbb{R}_+ et :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$