

1 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x \sin(y) - y \sin(x)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 \end{cases}.$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

$$\text{On pose pour tous réels } x \text{ et } y : f(x, y) = \begin{cases} y(x - y) \text{ si } x \geq y \\ x(y - x) \text{ si } x < y \end{cases}$$

Etudier la continuité de f .

Exercice 3 (*D'après Centrale 2013*)

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq 0\}$.

$$\text{On définit } f \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^5}{y^2} e^{-x^2/y} \text{ si } y \neq 0 \\ (x, 0) \mapsto 0 \end{cases} \quad \text{et } g \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x^4}{y^2} e^{-x^2/y} \text{ si } y \neq 0 \\ (x, 0) \mapsto 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $y \geq 0$, $x \mapsto f(x, y)$ et $x \mapsto g(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto g(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
3. f et g sont-elles continue sur $\mathcal{D}$?

Exercice 4 (*X 2010*)

Montrer qu'il n'existe aucune application continue bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2 Fonctions lipschitziennes

Exercice 5 (Mines 2023)

1. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies.

Soit u une application linéaire de E dans F .

Montrer que u est lipschitzienne.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \leq C \int_{-1}^1 P(x)^2 dx$$

3 Parties fermées

Exercice 6 (X 2021)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\}$ est-elle une partie fermée de $(\mathbb{R}^n)^3$?

L'examineur a demandé de traiter les cas $n = 3$, $n = 2$ et $n = 4$ avant de passer au cas général.

Exercice 7 (Centrale 2022)

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que
$$\begin{cases} P_0(X) = X \\ \forall n \geq 1 \quad P_n(X) = (P_{n-1}(X))^2 + X \end{cases}.$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite $(|P_n(c)|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tendent pas vers $+\infty$.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Le but de cette question est de montrer l'équivalence des deux propositions :

(i) $c \notin \mathcal{M}$

(ii) $\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } |P_n(c)| > 2$

(a) Montrer $(i) \implies (ii)$.

(b) On veut montrer $(ii) \implies (i)$.

• Premier cas

Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| \leq 2$ et tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|P_n(c)| > 2$.

On note $n_c = \min(\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } |P_n(c)| > 2\})$.

Montrer :

$$\forall n \geq n_c \quad |P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| (|P_{n_c}(c)| - 1)^{n-n_c}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P_n(c)|$

• Deuxième cas

Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$.

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |P_n(c)| \geq |c| (|c| - 1)^n$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P_n(c)|$

3. Une dernière question dont je n'ai pas l'énoncé.

On peut envisager de prouver que $\mathcal{M}$ est fermé, borné et non vide.