TD 2025-2026
Analyse 2
Chapitre 3
Continuité

941

1 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \mapsto 0 \end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Correction

f est clairement continue sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si on veut détailler :

Les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto y \end{cases}$ sont continues : cf le cours. On peut aussi dire qu'elles sont polynomiales.

sin est continue sur $\mathbb{R}$ donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin x \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin y \end{cases}$ sont continues.

On en déduit que la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x\,\sin y - y\,\sin x \end{cases}$ est continue.

De plus, la fonction $\begin{cases} \mathcal{U} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2+y^2 \end{cases}$ est continue et ne s'annule jamais donc f est continue sur $\mathcal{U}$.

Passons à la continuité en $(0,0)$.

$\sin x = x + o(x^2)$ quand x tend vers 0 : c'est un résultat sur les fonctions d'une seule variable vu en Sup.

$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ donc $\sin x = x + o(x^2+y^2)$ quand (x,y) tend vers 0 (on voit $\sin x$ et x comme des fonctions de (x,y)).

Ce serait plus clair avec des fonctions ϵ mais il s'agit ici de sauver la notation o utilisée en Sup.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{xy + x\,o(x^2+y^2) - yx - y\,o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x\,o(x^2+y^2) - y\,o(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \text{ à ne surtout pas factoriser} \\
&= x\,o(1) + y\,o(1) \text{ c'est bien un } + \text{ mais un } - \text{ conviendrait aussi}
\end{aligned}$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}]{} 0 = f(0,0)$.
f est continue en $(0,0)$.
Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On pose pour tous réels x et y : $f(x,y) = \begin{cases} y\,(x-y) \text{ si } x \geq y \\ x\,(y-x) \text{ si } x < y \end{cases}$
Etudier la continuité de f.

Correction
Il est possible d'écrire :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x,y) = \min(x,y)\,(\max(x,y) - \min(x,y))$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
On en déduit que $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
On peut enfin conclure à la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Voici une méthode plus "élémentaire" :
On notera $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ la norme euclidienne canonique de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- **Premier cas :** $x_0 > y_0$.
  $\exists r > 0$ tq $D((x_0,y_0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r\} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq y\}$ (faire un dessin).
  La restriction de f à $D((x_0,y_0),r)$ est polynomiale donc continue.
  On en déduit que f est continue en (x_0,y_0).
  Si on y tient, cela peut se justifier en revenant à la définition :
  Soit $\epsilon > 0$.
  $\exists \delta > 0$ tq $\forall (x,y) \in D((x_0,y_0),r)\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \epsilon$ (continuité en (x_0,y_0) de la restriction de f à $D((x_0,y_0),r)$)
  Quitte à diminuer δ, on peut supposer $\delta < r$ de sorte que si $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \delta$ alors $(x,y) \in D((x_0,y_0),r)$.
  On a donc :
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \epsilon$
  et on a justifié la continuité de f en $(x_0;y_0)$.

- **Deuxième cas :** $x_0 < y_0$.
  $\exists r > 0$ tq $D((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x < y\}$.
  La restriction de f à $D((x_0, y_0), r)$ est polynomiale donc continue.
  On en déduit que f est continue en (x_0, y_0).

- **Troisième cas :** $x_0 = y_0$
  $f(x, y) = y(x - y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0) \\ x\geq y}]{} 0 = f(x_0, x_0)$
  $f(x, y) = x(y - x) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,x_0) \\ x<y}]{} 0 = f(x_0, x_0)$
  On en déduit que f est continue en (x_0, x_0).
  Si on y tient, cela peut se justifier en revenant à la définition :
  Soit $\epsilon > 0$.
  $\exists \delta_1 > 0$ tq $\left.\begin{array}{c} x \geq y \\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon$
  (il n'y a rien de particulier à justifié : une fonction polynomiale est continue)
  $\exists \delta_2 > 0$ tq $\left.\begin{array}{c} x < y \\ \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon$
  Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$.
  Si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta$ alors $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta_1$ et $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta_2$ et $x \geq y$ ou $x < y$.
  Donc :
  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \epsilon$
  et on a bien justifié la continuité de f en (x_0, y_0).

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 *(D'après Centrale 2013)*

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq 0\}$.

On définit $f \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{x^5}{y^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/y} \text{ si } y \neq 0 \\ (x, 0) \mapsto 0 \end{cases}$ et $g \begin{cases} \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{x^4}{y^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/y} \text{ si } y \neq 0 \\ (x, 0) \mapsto 0 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $y \geq 0$, $x \mapsto f(x, y)$ et $x \mapsto g(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto g(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
3. f et g sont-elles continue sur $\mathcal{D}$?

Correction

1. On fixe $y_0 \in \mathbb{R}_+$.
   - **Premier cas :** $y_0 = 0$
     $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x, y_0) = g(x, y_0) = 0$
     $x \mapsto f(x, y_0)$ et $x \mapsto g(x, y_0)$ sont constantes donc continues sur $\mathbb{R}$.
   - **Deuxième cas :** $y_0 \neq 0$
     $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x, y_0) = \dfrac{x^5}{y_0^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/y_0}$
     $x \mapsto f(x, y_0)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.
     $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x, y_0) = \dfrac{x^4}{y_0^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/y_0}$
     $x \mapsto g(x, y_0)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.

2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$.
   - **Premier cas :** $x_0 = 0$
     $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \; f(x_0, y) = \dfrac{0^5}{y^2}\,\mathrm{e}^{-0^2/y} = 0$
     $f(x_0, 0) = 0$
     Donc :
     $\forall y \in \mathbb{R}_+ \; f(x_0, y) = 0$
     Donc $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
     $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \; g(x_0, y) = \dfrac{0^4}{y^2}\,\mathrm{e}^{-0^2/y} = 0$
     $g(x_0, 0) = 0$
     Donc :
     $\forall y \in \mathbb{R}_+ \; g(x_0, y) = 0$
     Donc $y \mapsto g(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   - **Deuxième cas :** $x_0 \neq 0$
     Il est clair que $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
     $x_0^2 > 0$ donc $\dfrac{x_0^2}{y} \xrightarrow[y \to 0^+]{} +\infty$
     Donc $f(x_0, y) = x_0 \left(\dfrac{x_0^2}{y}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{x_0^2}{y}\right) \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0 = f(x_0, 0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue en 0.
     Finalement, $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
     Il est clair que $y \mapsto g(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
     Donc $g(x_0, y) = \left(\dfrac{x_0^2}{y}\right)^2 \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0 = g(x_0, 0)$ et $y \mapsto g(x_0, y)$ est continue en 0.
     Finalement, $y \mapsto g(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction g n'est pas continue sur $\mathcal{D}$:
   $\forall x \in \mathbb{R}^* \; g(x, x^2) = \mathrm{e}^{-1} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} \mathrm{e}^{-1} \neq g(0, 0)$.
   Par contre f est continue sur $\mathcal{D}$ mais l'exemple de g montre que cela doit être justifié soigneusement. En particulier, la continuité des fonctions partielles établie dans les deux premières questions ne suffit pas.
   Les théorèmes généraux montrent que f et g sont continues sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y > 0\right\}$.
   Il reste donc à étudier la continuité de f en $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

   - **Premier cas :** $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$
     $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \; f(x, y) = x \left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{x^2}{y}\right)$
     $\dfrac{x^2}{y} \xrightarrow[\substack{(x,y) \to (x_0, 0) \\ y > 0}]{} +\infty$
     On peut considérer que c'est clair ou le justifier en revenant à la définition :
     Soit $M > 0$.
     Soit $\delta = \dfrac{x_0^2}{4M} > 0$.
     Soit $(x, y) \in [x_0/2; 2x_0] \times]0; \delta]$ ou $[2x_0; x_0/2] \times]0; \delta]$ suivant le signe de x_0.
     $x^2 \geq \dfrac{x_0^2}{4}$ et $\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{\delta}$ donc $\dfrac{x^2}{y} \geq \dfrac{x_0^2}{4\,\delta} = M$

On en déduit :
$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}]{} x_0 \times 0$
De plus, $f(x,y) = 0 \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y=0}]{} 0$ donc :
$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\mathcal{D}}]{} 0 = f(x_0,0)$
et on a justifié la continuité de f en (x_0, y_0).
On peut justifier de la même façon la continuité de g en $(x_0, 0)$.

- **Deuxième cas :** $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
  Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 \,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc :
  $\exists C \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $0 \leq \varphi(t) \leq C$.
  $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ $|f(x,y)| = |x|\ \varphi\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \leq C\,|x|$ trivial pour $y = 0$
  D'où $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$.

Finalement f est continue sur $\mathcal{D}$.

Exercice 4 *(X 2010)*

Montrer qu'il n'existe aucune application continue bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction
Lemme proposé par l'examinateur : montrer qu'il n'existe aucune application continue bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Le lemme est trivial.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ continue et bijective.
$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $f(x_1) = -1$ et $f(x_2) = 1$
D'après le TVI, il existe $x \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = 0$
C'est absurde.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et bijective.
$\exists M_0 \in \mathbb{R}^2$ tq $f(M_0) = 0$
$\exists M_1 \in \mathbb{R}^2$ tq $f(M_1) = -1$
$\exists M_2 \in \mathbb{R}^2$ tq $f(M_2) = 1$
Il existe un chemin continu qui va de M_1 à M_2 sans passer par M_0.
Le mieux est de faire un dessin.
Si $M_0 \notin [M_1; M_2]$ alors $[M_1; M_2]$ convient.
Si $M_0 \in [M_1; M_2]$; on choisit M_3 en dehors de la droite (M_1, M_2). La réunion des segments $[M_1; M_3]$ et $[M_3; M_2]$ convient.
On suppose ce chemin paramétré par $t \in [0; 1]$:
$\exists \varphi \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}^2)$ tq $\begin{cases} \varphi(0) = M_1 \\ \varphi(1) = M_2 \\ \forall t \in [0;1]\ \varphi(t) \neq M_0 \end{cases}$
$g = f \circ \varphi$ est une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.
$g(0) = f(M_1) = -1$ et $g(1) = f(M_2) = 1$ donc par le TVI :

$\exists t \in [0;1]$ tq $g(t)=0$.
On a donc $f(M_0)=f(\varphi(t))=0$ avec $\varphi(t)\neq M_0$ ce qui contredit l'injectivité de f.

2 Fonctions lipschitziennes

Exercice 5 *(Mines 2023)*

1. Soit $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies.
   Soit u une application linéaire de E dans F.
   Montrer que u est lipschitzienne.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer :
   $\exists C\in\mathbb{R}_+$ tq $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$ $P(-1)^2+P(0)^2+P(1)^2\leq C\displaystyle\int_{-1}^{1}P(x)^2\,\mathrm{d}x$

Correction

1. • **Première méthode : utilisation du théorème des bornes atteintes**
   $\mathcal{S}=\{x\in E \text{ tq } \|x\|_E=1\}$ est une partie fermée bornée et non vide de E (le cas $E=\{0\}$ est sans intérêt).
   u étant linéaire en dimension finie, u est continue.
   Par composition, l'application $x\mapsto\|u(x)\|_F$ est continue.
   On en déduit qu'elle est bornée sur $\mathcal{S}$:
   $\exists M\in\mathbb{R}_+$ tq $\forall x\in\mathcal{S}$ $\|u(x)\|_F\leq M$
   Soit $x\in\backslash\{0\}$.
   $\dfrac{x}{\|x\|_E}\in\mathcal{S}$ donc $\left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F\leq M$
   On en déduit $\left\|\dfrac{1}{\|x\|_E}u(x)\right\|_F\leq M$ puis $\dfrac{1}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F\leq M$.
   Donc $\|u(x)\|_F\leq\|x\|_E$, inégalité qui est vraie aussi dans le cas $x=0$.
   On a alors :
   $\forall(x,y)\in E^2$ $\|u(x)-u(y)\|_F=\|u(x-y)\|_F\leq M\|x-y\|_E$

   • **Deuxième méthode**
   L'examinateur a demandé de traiter cette question sans le théorème des bornes atteintes.
   Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

$$\begin{aligned}\forall x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\in E\ \|u(x)\|_F &= \left\|\sum_{i=1}^{n}x_iu(e_i)\right\|_F\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|u(e_i)\|_F\\ &\leq k\sum_{i=1}^{n}|x_i| \text{ avec } k=\max_{1\leq i\leq n}(\|u(e_i)\|_F)\end{aligned}$$

   Mais $\begin{cases}E\to\mathbb{R}_+\\ x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}|x_i|\end{cases}$ est une norme et E est de dimension finie donc elle est équivalente à $\|.\|_E$. En particulier :

$\exists m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq m \|x\|_E$
On en déduit :
$\forall x \in E \ \ \|u(x)\|_F \leq km \|x\|_E$
On conclut comme dans la première méthode.

2. On prend $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\|P\|_E = \sqrt{\int_{-1}^{1} P(x)^2 \, \mathrm{d}x}$.
L'examinateur a demandé de prouver que c'est bien une norme. On le fait en vérifiant que $\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(x)Q(x) \, \mathrm{d}x \end{cases}$ est un produit scalaire.
On prend $F = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On prend $u \begin{cases} E \to F \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$
D'après ce qui précède, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall P \in E \ \ \|u(P)\|_F \leq k \|P\|_E$
Il n'y a plus qu'à élever au carré.

3 Parties fermées

Exercice 6 *(X 2021)*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$\left\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\right\}$ est-elle une partie fermée de $(\mathbb{R}^n)^3$?
L'examinateur a demandé de traiter les cas $n = 3$, $n = 2$ et $n = 4$ avant de passer au cas général.

Correction

- **Cas** $n = 3$.
$\left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\right\} = \left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x, y, z) = 0\right\}$.
$\det_{Can}$ est une application continue de $\left(\mathbb{R}^3\right)^3$ dans $\mathbb{R}$ donc $\left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\right\}$ est une partie fermée de $\left(\mathbb{R}^3\right)^3$.
- **Cas** $n = 2$.
$\left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\right\} = \left(\mathbb{R}^2\right)^3$ donc $\left\{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3 \text{ tq } (x, y, z) \text{ est liée}\right\}$ est une partie fermée de $\left(\mathbb{R}^2\right)^3$
- **Cas** $n = 4$.
Cette question n'est pas dans l'esprit du programme et de ce fait difficile à traiter avec les outils du programme.
Si la famille (x, y, z) est liée alors pour tout $t \in \mathbb{R}^4$, la famille (x, y, z, t) est liée.
Si la famille (x, y, z) est libre alors d'après le théorème de la base incomplète, il existe $t \in \mathbb{R}^4$ tel que la famille (x, y, z, t) soit libre.
Donc :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \text{ liée} &\iff \forall t \in \mathbb{R}^4 \ (x, y, z, t) \text{ liée} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}^4 \ \det_{Can}(x, y, z, t) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\left\{(x,y,z)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\} = \bigcap_{t\in\mathbb{R}^4}\left\{(x,y,z)\in\left(\mathbb{R}^4\right)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x,y,z,t)=0\right\}$
est une intersection de fermés donc un fermé.

- **Cas général**
$\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } (x,y,z) \text{ est liée}\right\} = \bigcap_{(t_1,\ldots,t_{n-3})\in(\mathbb{R}^n)^{n-3}}\left\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}^n)^3 \text{ tq } \det_{Can}(x,y,z,t_1,\ldots,t_{n-3}) =\right.$
est une intersection de fermés donc un fermé.

Remarque
La méthode précédente s'applique si on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$.
Dans $\mathbb{R}^n$, une méthode complètement différente est possible.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice $M = \begin{pmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\ (y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\ (z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{pmatrix}$

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(x\mid x)+b(x\mid y)+c(x\mid z)\\ a(y\mid x)+b(y\mid y)+c(y\mid z)\\ a(z\mid x)+b(z\mid y)+c(z\mid z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x\mid ax+by+cz)\\ (y\mid ax+by+cz)\\ (z\mid ax+by+cz)\end{pmatrix}$$
$$= a(x\mid ax+by+cz)+b(y\mid ax+by+cz)+c(z\mid ax+by+cz) = (ax+by+cz\mid ax+by+cz)$$
$$= \|ax+by+cz\|^2$$

Supposons (x,y,z) libre.
Soit $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker}(M)$.
On a $\|ax+by+cz\|^2=0$ donc $ax+by+cz=0$.
(x,y,z) est libre donc $(a,b,c)=(0,0,0)$.
$\operatorname{Ker}(M)$ est réduit à la colonne nulle donc M est inversible.
Supposons (x,y,z) liée.
Il existe $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ tel que $ax+by+cz=0$.
$M\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x\mid ax+by+cz)\\ (y\mid ax+by+cz)\\ (z\mid ax+by+cz)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ donc le noyau de M contient une colonne non nulle et M n'est pas inversible.
On a donc :
(x,y,z) liée $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\ (y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\ (z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{vmatrix}=0$

et la fonction $\begin{cases}(\mathbb{R}^n)^3 \to \mathbb{R}\\ (x,y,z)\mapsto \begin{vmatrix}(x\mid x) & (x\mid y) & (x\mid z)\\ (y\mid x) & (y\mid y) & (y\mid z)\\ (z\mid x) & (z\mid y) & (z\mid z)\end{vmatrix}\end{cases}$ est continue.

Exercice 7 *(Centrale 2022)*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\begin{cases} P_0(X) = X \\ \forall n \geq 1 \; P_n(X) = (P_{n-1}(X))^2 + X \end{cases}$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des nombres complexes c tels que la suite $|(P_n(c)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent pas vers $+\infty$.

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Le but de cette question est de montrer l'équivalence des deux propositions :

   (i) $c \notin \mathcal{M}$

   (ii) $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $|P_n(c)| > 2$

   (a) Montrer $(i) \implies (ii)$.

   (b) On veut montrer $(ii) \implies (i)$.
   - **Premier cas**
     Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| \leq 2$ et tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|P_n(c)| > 2$.
     On note $n_c = \min\left(\{n \in \mathbb{N} \text{ tq } \; |P_n(c)| > 2\}\right)$.
     Montrer :
     $\forall n \geq n_c \; |P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n-n_c}$
     et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} |P_n(c)|$
   - **Deuxième cas**
     Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| > 2$.
     Montrer :
     $\forall n \in \mathbb{N} \; |P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n$
     et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} |P_n(c)|$
3. Une dernière question dont je n'ai pas l'énoncé.
   On peut envisager de prouver que $\mathcal{M}$ est fermé, borné et non vide.

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: P_n est unitaire de degré 2^n.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   $P_{n+1} = P_n^2 + X$ avec P_n^2 de degré $2^{n+1} > 1$ donc P_{n+1} est de degré 2^{n+1} et de coefficient dominant $(\text{dom}(P_n))^2 = 1$.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
2. (a) On suppose que c n'appartient pas à $\mathcal{M}$.
   $|P_n(c)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \; |P_n(c)| > 2$

   (b)
   - **Premier cas :**
     On va évidemment raisonner par récurrence et on aura besoin de $|P_{n+1}(c)| \geq \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)|P_n(c)|$.
     On s'intéresse donc à $\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}$ sans justifier dans cette phase de recherche que $P_n(c) \neq 0$.
     $\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} = P_n(c) + \dfrac{c}{P_n(c)}$ avec $P_n(c)$ plutôt grand et $\dfrac{c}{P_n(c)}$ plutôt petit.
     $\left|\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)|\right| \leq \left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} - P_n(c)\right| = \dfrac{|c|}{|P_n(c)|} \leq \dfrac{2}{|P_n(c)|} \leq 1$ car $|P_n(c)| \geq 2$ ce qu'on justifiera plus tard.

Donc $\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)| \geq -1$
Il n'y a plus qu'à rédiger soigneusement.

Pour tout $n \geq n_c$, soit $\mathcal{P}(n) : |P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n-n_c}$
$\mathcal{P}(n_c)$ est vraie ($|P_{n_c}(c)| \geq |P_{n_c}(c)|$)
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n \geq n_c$).
$|P_{n_c}(c)| \geq 2$ donc $|P_{n_c}(c)| - 1 \geq 1$ et $|P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \geq 2$.
$\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} = P_n(c) + \dfrac{c}{P_n(c)}$
$\left|\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)|\right| \leq \left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} - P_n(c)\right| = \dfrac{|c|}{|P_n(c)|} \leq \dfrac{2}{|P_n(c)|} \leq 1$ car $|P_n(c)| \geq 2$
Donc $\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)| \geq -1$.
Donc $\dfrac{|P_{n+1}(c)|}{|P_n(c)|} \geq |P_n(c)| - 1 \geq |P_{n_c}| - 1$
Donc $|P_{n+1}(c)| \geq |P_n(c)| \left(|P_{n_c}| - 1\right) \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n+1-n_c}$

Autre méthode
Pour tout $n \geq n_c$, soit $\mathcal{P}(n) : |P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n-n_c}$
$\mathcal{P}(n_c)$ est vraie ($|P_{n_c}(c)| \geq |P_{n_c}(c)|$)
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n \geq n_c$).
On a $|P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n-n_c}$
et on veut montrer $|P_{n+1}(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n+1-n_c}$
On multiplie l'inégalité qu'on a par $|P_{n_c}(c)| - 1$ qui est bien positif.
$|P_n(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right) \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n+1-n_c}$
Et on espère que $|P_n(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right) \leq |P_{n+1}(c)| = |P_n(c)^2 + c|$
$\left||P_n(c)|^2 - |-c|\right| \leq |P_n(c)^2 + c|$ donc $|P_n(c)^2 + c| \geq |P_n(c)^2| - |c| \geq |P_n(c)|^2 - 2$
D'après l'hypothèse de récurrence : $|P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \geq 2$ donc :
$|P_n(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right) = |P_n(c)| \, |P_{n_c}(c)| - |P_n(c)| \leq |P_n(c)|^2 - 2$

On a donc prouvé :
$\forall n \geq n_c \;\; |P_n(c)| \geq |P_{n_c}(c)| \left(|P_{n_c}(c)| - 1\right)^{n-n_c}$
Comme $|P_{n_c}(c)| - 1 > 1$, $|P_n(c)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

- **Deuxième cas**
Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathcal{P}(n) : |P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie ($|c| \geq |c|$).
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
$|P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n \geq |c| > 0$ donc :
$\left|\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)|\right| \leq \left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} - P_n(c)\right| = \dfrac{|c|}{|P_n(c)|} \leq \dfrac{|c|}{|c| \left(|c| - 1\right)^n} = \dfrac{1}{\left(|c| - 1\right)^n} \leq$
1 car $|c| > 2$
Donc $\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| - |P_n(c)| \geq -1$
Donc $\left|\dfrac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)}\right| \geq |P_n(c)| - 1 \geq |c| - 1$
On en déduit :
$|P_{n+1}(c)| \geq |P_n(c)| \left(|c| - 1\right) \geq |c| \left(|c| - 1\right)^{n+1}$

Autre méthode
Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathcal{P}(n) : |P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie ($|c| \geq |c|$).
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a $|P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n$
et on veut montrer $|P_{n+1}(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^{n+1}$
On multiplie l'inégalité qu'on a par $|c| - 1$ qui est bien positif.
$|P_n(c)| \left(|c| - 1\right) \geq |c| \left(|c| - 1\right)^{n+1}$
Et on espère que $|P_n(c)| \left(|c| - 1\right) \leq |P_{n+1}(c)| = \left|P_n(c)^2 + c\right|$
$\left| |P_n(c)|^2 - |-c| \right| \leq \left|P_n(c)^2 + c\right|$ donc $\left|P_n(c)^2 + c\right| \geq \left|P_n(c)^2\right| - |c|$
Il suffit donc de prouver que $\left|P_n(c)^2\right| - |P_n(c)| \left(|c| - 1\right) - |c| \geq 0$.
Mais $\left|P_n(c)^2\right| - |P_n(c)| \left(|c| - 1\right) - |c| = \left(|P_n(c)| + 1\right) \left(|P_n(c)| - |c|\right)$ (étudier les racines de $X^2 - (|c| - 1)X - |c|$).
$|P_n(c)| + 1$ est évidemment positif et d'après l'hypothèse de récurrence $|P_n(c)| \geq |c|$

On a donc prouvé :
$\forall n \geq n_c \ |P_n(c)| \geq |c| \left(|c| - 1\right)^n$
Comme $|c| - 1 > 1$, $|P_n(c)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Dans les deux cas, on a montré que $c \notin \mathcal{M}$.
On a bien prouvé :
$(ii) \Longrightarrow (i)$.

3. On a montré que $\mathcal{M}$ est inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 2 : $\mathcal{M}$ est borné.
   $\mathcal{M}$ est non vide : il contient $c = 0$.
   $\mathcal{M}$ est fermé :
   $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{c \in \mathbb{C} \text{ tq } |P_n(c)| \leq 2\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}([-2; 2])$ avec $f_n \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto |P_n(z)| \end{cases}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et $[-2; 2]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc $f_n^{-1}([-2; 2])$ est un fermé de $\mathbb{C}$.
   Une intersection de fermés est un fermé donc $\mathcal{M}$ est un fermé.