

PC*1
DM N°2
2025-2026
Correction

Exercice 1

1. (a) f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto e^{ax}f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) e^{at} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée la fonction $x \mapsto e^{ax}f(x)$. On multiplie ensuite par la fonction $x \mapsto e^{-ax}$ elle-même de classe $\mathcal{C}^1$. Comme un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $U(f)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad U(f)'(x) &= -a e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt + e^{-ax} f(x) e^{ax} \\ &= -aU(f)(x) + f(x)\end{aligned}$$

- (b) Il résulte immédiatement de la question précédente que $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle $y' + ay = f$.

$U(f)(0) = e^0 \int_0^0 f(t) e^{at} dt = 0$ donc $U(f)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = f \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

a étant une constante, f étant continue et le coefficient de y' étant 1, il résulte du cours de première année que le problème de Cauchy précédent possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall t \in [0; x] \quad f(t) e^{at} \geq 0$$

Comme les bornes sont dans le bon sens, on en déduit :

$$\int_0^x f(t) e^{at} dt \geq 0$$

Il n'y a plus qu'à multiplier par $e^{-ax} \geq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad U(f)(x) \geq 0$$

- (b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |U(f)(x)| &= \left| e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt \right| \\ &= e^{-ax} \left| \int_0^x f(t) e^{at} dt \right| \\ &\leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \text{ les bornes sont dans le bon sens} \\ &= U(|f|)(x)\end{aligned}$$

3. (a) • f étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$ est bien défini. C'est un réel, trivialement positif.

•

$$\begin{aligned}
 \forall (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E \quad \|\lambda f\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |\lambda f(x)| \\
 &= \sup_{x \in \mathbb{R}_+} (|\lambda| |f(x)|) \\
 &= |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| \text{ car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+ \\
 &= |\lambda| \|f\|_\infty
 \end{aligned}$$

- Soit $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 0$.
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$
Donc :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| = 0$
Donc :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 0$
Donc $f = 0$
- Soient f et g dans E .
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ indépendant de x .
 $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $|(f+g)(x)|$ donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est supérieur au plus petit des majorants :
 $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

- (b) Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - e^{-x} \end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| = 1 - e^{-x} \leq 1$
Donc f est bornée et $\|f\|_\infty \leq 1$.
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| = 1 - e^{-x} \leq \|f\|_\infty$
On fait tendre x vers $+\infty$: $1 \leq \|f\|_\infty$
Donc $\|f\|_\infty = 1$.
Enfin :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |f(x)| = 1 - e^{-x} < 1 = \|f\|_\infty$

- (c) Soit $f \in E$.

On a vu que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc $U(f)$ est continue. Reste à montrer que $U(f)$ est bornée.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |U(f)(x)| &\leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \\
 &\leq e^{-ax} \int_0^x \|f\|_\infty e^{at} dt \\
 &\leq e^{-ax} \|f\|_\infty \left[\frac{e^{at}}{a} \right]_0^x \\
 &\leq e^{-ax} \|f\|_\infty \frac{e^{ax} - 1}{x} = \|f\|_\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \\
 &\leq \frac{1}{a} \|f\|_\infty
 \end{aligned}$$

Donc $U(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\|U(f)\|_\infty \leq \frac{1}{a} \|f\|_\infty$$

(d) Soit C une constante telle que :

$$\forall f \in E \quad \|U(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$$

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$.
 $f \in E$ et $\|f\|_\infty = 1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad U(f)(x) &= e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt = e^{-ax} \int_0^x e^{at} dt \\ &= e^{-ax} \frac{e^{ax} - 1}{a} \\ &= \frac{1 - e^{-ax}}{a} \end{aligned}$$

On en déduit comme en 3.b : $\|U(f)\|_\infty = \frac{1}{a}$.

$\|U(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$ donne alors $C \geq \frac{1}{a}$.

4. (a) $U(f)$ est donc également une fonction positive. D'après le cours, il revient alors au même de montrer que la fonction $X \mapsto \int_0^X U(f)(x) dx$ est majorée.

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X U(f)(x) dx &= \int_0^X \left(e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt \right) dx \\ &= \left[-\frac{e^{-ax}}{a} \int_0^x f(t) e^{at} dt \right]_0^X + \frac{1}{a} \int_0^X f(x) dx \quad \text{IPP} \\ &= -\frac{1}{a} U(f)(X) + \frac{1}{a} \int_0^X f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^X f(x) dx \quad \text{car } U(f)(x) \geq 0 \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) dx \quad \text{car } f \geq 0 \end{aligned}$$

D'après les remarques du début de la question, l'intégrale $\int_0^{+\infty} U(f)(x) dx$ converge.

Remarques

- En écrivant $U(f)(X) = \int_0^X f(x) dx - a \int_0^X U(f)(x) dx$, on montre que $U(f)$ a une limite finie en $+\infty$.

Comme $\int_0^{+\infty} U(f)(x) dx$ converge, cette limite ne peut être que 0 et on a en prime,

toujours pour une fonction positive : $\int_0^{+\infty} U(f)(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) dx$

- Il est possible de faire l'intégration par parties avec le théorème du cours. Cela

suppose de prouver, a priori, que $U(f)$ a une limite finie en $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 \forall x > 0 \quad 0 \leq U(f)(x) &= e^{-ax} \left(\int_0^{x/2} f(t) e^{at} dt + \int_{x/2}^x f(t) e^{at} dt \right) \\
 &\leq e^{-ax} \left(\int_0^{x/2} f(t) e^{ax/2} dt + \int_{x/2}^x f(t) e^{ax} dt \right) \\
 &\leq e^{-ax/2} \int_0^{x/2} f(t) dt + \int_{x/2}^x f(t) dt \\
 &\leq e^{-ax/2} \int_0^{x/2} f(t) dt + \int_0^x f(t) dt - \int_0^{x/2} f(t) dt \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \times \int_0^{+\infty} f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0
 \end{aligned}$$

(b) Soit $f \in F$.

La continuité de $U(f)$ a déjà été établie.

$|f|$ appartient à F et est positive donc :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} U(|f|)(x) dx$ converge.

Mais $|f|$ étant positive, la fonction $U(|f|)$ est positive donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} U(|f|)(x) dx$ converge absolument.

Donc la fonction $U(|f|)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Mais $|U(f)| \leq U(|f|)$ donc $U(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Soit $f \in F$ positive.

$$\forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X U(f)(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ d'après 4.a.}$$

On fait tendre X vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} U(f)(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Soit $f \in F$ quelconque :

$$\begin{aligned}
 \|U(f)\|_1 &= \int_0^{+\infty} |U(f)(x)| dx \\
 &\leq \int_0^{+\infty} U(|f|)(x) dx \text{ car } |U(f)| \leq U(|f|) \\
 &\leq \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} |f(x)| dx \text{ car } |f| \geq 0 \\
 &\leq \frac{1}{a} \|f\|_1
 \end{aligned}$$

(d) Soit C une constante telle que :

$$\forall f \in F \quad \|U(f)\|_1 \leq C \|f\|_1$$

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-ax} \end{cases}.$$

$a > 0$ donc $f \in F$.

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \left[\frac{-e^{-ax}}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad U(f)(x) &= e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt = e^{-ax} \int_0^x e^{-at} e^{at} dt \\ &= e^{-ax} \int_0^x dt \\ &= x e^{-ax} \end{aligned}$$

D'après 4.(a) :

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X U(f)(x) dx &= -\frac{1}{a} U(f)(X) + \frac{1}{a} \int_0^X f(x) dx \\ &= -\frac{1}{a} X e^{-aX} + \frac{1}{a} \int_0^X f(x) dx \end{aligned}$$

On fait tendre X vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} U(f)(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

Comme f et $U(f)$ sont positives, on en déduit $\|U(f)\|_1 = \frac{1}{a} \|f\|_1$.

L'inégalité $\|U(f)\|_1 \leq C \|f\|_1$ donne alors $C \geq \frac{1}{a}$.

5. (a) Soit $f \in G$.

La continuité de $U(f)$ a déjà été établie.

D'après 1.b, $U(f) = \frac{1}{a} (f - U(f)')$. On en déduit :

$$U(f)^2 = \frac{1}{a} (fU(f) - U(f)U(f)').$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x (U(f)(t))^2 dt &= \frac{1}{a} \int_0^x f(t)U(f)(t) dt - \frac{1}{a} \int_0^x U(f)(t)U(f)'(t) dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^x f(t)U(f)(t) dt - \frac{1}{2a} \left[(U(f)(t))^2 \right]_0^x \\ &= \frac{1}{a} \int_0^x f(t)U(f)(t) dt - \frac{(U(f)(x))^2}{2a} \\ &\leq \frac{1}{a} \int_0^x f(t)U(f)(t) dt \\ &\leq \frac{1}{a} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^x (U(f)(t))^2 dt} \end{aligned}$$

Si $\int_0^x (U(f)(t))^2 dt > 0$, on en déduit :

$$\sqrt{\int_0^x (U(f)(t))^2 dt} \leq \frac{1}{a} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt}$$

et cette inégalité est triviale si $\int_0^x (U(f)(t))^2 dt = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{\int_0^x (U(f)(t))^2 dt} \leq \frac{1}{a} \sqrt{\int_0^x f(t)^2 dt}$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x (U(f)(t))^2 dt \leq \frac{1}{a^2} \int_0^x f(t)^2 dt \leq \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \text{ réel indépendant de } x.$$

La fonction $U(f)^2$ étant positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 dt$ converge.

La fonction $U(f)^2$ étant positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 dt$ converge absolument.

La fonction $U(f)$ est donc de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque

Une autre méthode est possible :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \left| \int_0^x f(t) e^{at} dt \right| &= \left| \int_0^x f(t) e^{at/2} e^{at/2} dt \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^x f(t)^2 e^{at} dt} \times \sqrt{\int_0^x e^{at} dt} \text{ par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (U(f)(x))^2 &\leq e^{-2ax} \int_0^x f(t)^2 e^{at} dt \times \frac{e^{ax} - 1}{a} \\ &\leq \frac{1}{a} e^{-ax} \int_0^x f(t)^2 e^{at} dt = \frac{1}{a} U(f^2)(x) \end{aligned}$$

Par hypothèse, f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après la question précédente, $U(f^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par comparaison, $U(f)$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\|U(f)\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{a} \|U(f^2)\|_1} \leq \sqrt{\frac{1}{a} \frac{\|f^2\|_1}{a}} = \frac{1}{a} \|f\|_2$$

(b) Soit $f \in G$.

On a établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x (U(f)(t))^2 dt \leq \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient :

$$\|U(f)\|_2^2 \leq \frac{1}{a^2} \|f\|_2^2$$

D'où :

$$\|U(f)\|_2 \leq \frac{1}{a} \|f\|_2$$

(c) Soit C une constante telle que :

$$\forall f \in F \quad \|U(f)\|_2 \leq C \|f\|_2$$

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\epsilon x} \end{cases}$ avec $\epsilon > 0$ et $\epsilon \neq a$.

$f \in G$ et :

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\epsilon x} dx = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad U(f)(x) &= e^{-ax} \int_0^x e^{(a-\epsilon)t} dt \\ &= e^{-ax} \left[\frac{e^{(a-\epsilon)t}}{a-\epsilon} \right]_0^x = \frac{e^{-ax} (e^{(a-\epsilon)x} - 1)}{a-\epsilon} \\ &= \frac{e^{-\epsilon x} - e^{-ax}}{a-\epsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|U(f)\|_2^2 &= \frac{1}{(a-\epsilon)^2} \int_0^{+\infty} (e^{-\epsilon x} - e^{-ax})^2 dx \\
&= \frac{1}{(a-\epsilon)^2} \int_0^{+\infty} (e^{-2\epsilon x} - 2e^{-\epsilon x} e^{-ax} + e^{-2ax}) dx \\
&= \frac{1}{(a-\epsilon)^2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - \frac{2}{\epsilon+a} + \frac{1}{2a} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$C^2 \geq \frac{\|U(f)\|_2^2}{\|f\|_2^2} = \frac{1}{(a-\epsilon)^2} \left(1 - \frac{4\epsilon}{\epsilon+a} + \frac{\epsilon}{a} \right)$$

On fait alors tendre ϵ vers 0 et on obtient :

$$C^2 \geq \frac{1}{a^2} \text{ puis } C \geq \frac{1}{a}.$$

Exercice 2

Généralités

1. Soit $f \in E$.

$$\forall x \in [0; 1] \quad \frac{x}{2} \text{ et } \frac{x+1}{2} \in [0; 1]$$

Les théorèmes généraux sur les fonctions de classe C^∞ assurent que $T(f)$ est de classe C^∞ .

Passons à la linéarité :

Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0; 1] \quad T(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{2} \left((\lambda f + \mu g) \left(\frac{x}{2} \right) + (\lambda f + \mu g) \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\lambda f \left(\frac{x}{2} \right) + \mu g \left(\frac{x}{2} \right) + \lambda f \left(\frac{x+1}{2} \right) + \mu g \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{\lambda}{2} \left(f \left(\frac{x}{2} \right) + f \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) + \frac{\mu}{2} \left(g \left(\frac{x}{2} \right) + g \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) \\
&= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x)
\end{aligned}$$

$$\text{D'où } T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$$

2. Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 T(f)(x) dx &= \int_0^1 f \left(\frac{x}{2} \right) \frac{dx}{2} + \int_0^1 f \left(\frac{x+1}{2} \right) \frac{dx}{2} \\
&= \int_0^{1/2} f(t) dt + \int_{1/2}^1 f(t) dt \\
&= \int_0^1 f(t) dt
\end{aligned}$$

$$3. \quad \forall x \in [0; 1] \quad T(f)(x) = \frac{1}{2} \left(f \left(\frac{x}{2} \right) + f \left(\frac{x+1}{2} \right) \right)$$

La dérivation ne pose pas de problème :

$$\forall x \in [0; 1] \quad [T(f)]'(x) = \frac{1}{4} \left(f' \left(\frac{x}{2} \right) + f' \left(\frac{x+1}{2} \right) \right)$$

$$\text{et } [T(f)]' = \frac{1}{2} T(f')$$

Noyau de T

4. Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} f \in \ker(T) &\iff \forall x \in [0; 1] \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 0 \\ &\iff \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad f\left(t + \frac{1}{2}\right) = -f(t) \end{aligned}$$

car $\frac{x}{2}$ décrit $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ quand x décrit $[0; 1]$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(2(2n+1)\pi x) \end{cases}$.

Ces fonctions appartiennent évidemment à E .

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad f_n\left(t + \frac{1}{2}\right) &= \sin(2(2n+1)\pi t + (2n+1)\pi) = (-1)^{2n+1} \sin(2(2n+1)\pi t) \\ &= -f_n(t) \end{aligned}$$

Les fonctions f_n appartiennent au noyau de T et sont linéairement indépendantes : ce sont des vecteurs propres pour la dérivation seconde associés à des valeurs propres distinctes : les nombres $-4(2n+1)^2\pi^2$.

A propos des éléments propres de T : première méthode

6. (a) La fonction $|f|$ est continue sur le *segment* $[0; 1]$ donc elle y est bornée et atteint ses bornes.

Donc il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq |f(x_0)|$$

(b)

$$\begin{aligned} |\lambda| |f(x_0)| &= |\lambda f(x_0)| = |T(f)(x_0)| \\ &= \left| \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left| f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (|f(x_0)| + |f(x_0)|) = |f(x_0)| \end{aligned}$$

D'où $(|\lambda| - 1) |f(x_0)| \leq 0$ avec $|\lambda| - 1 > 0$.

Donc $|f(x_0)| \leq 0$.

Mais $|f(x_0)| \geq 0$ donc $|f(x_0)| = 0$.

(c) On a donc :

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq 0$$

On en déduit que f est la fonction nulle.

λ n'est donc pas valeur propre de T .

On en déduit que les valeurs propres de T appartiennent toutes au segment $[-1; 1]$.

Remarque

Une autre méthode est possible.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 1$.

Soit $f \in E$ tel que $T(f) = \lambda f$.

$$\forall x \in [0; 1] \quad |T(f)(x)| = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \right) = T(|f|)(x)$$

On en déduit :

$$|\lambda| |f| = |\lambda f| = |T(f)| \leq T(|f|)$$

On intègre cette inégalité :

$$|\lambda| \int_0^1 |f(x)| \, dx \leq \int_0^1 T(|f|)(x) \, dx = \int_0^1 |f(x)| \, dx$$

$$|\lambda| > 1 \text{ donc } \int_0^1 |f(x)| \, dx = 0$$

Comme $|f|$ est continue et positive :

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| = 0$$

et finalement :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = 0$$

7. (a)

$$\begin{aligned} f(x_0) &= T(f)(x_0) \\ &= \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (f(x_0) + f(x_0)) = f(x_0) \end{aligned}$$

Donc : $f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = f(x_0) + f(x_0)$ avec $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \leq f(x_0)$ et $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \leq f(x_0)$.

On a donc $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f(x_0)$ et $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = f(x_0)$.

(b) Une récurrence triviale donne alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x_0) = f(0).$$

(c) D'après la question précédente :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) \leq f(x_0) = f(0)$$

$T(-f) = -T(f) = -f$ donc on a aussi :

$$\forall x \in [0; 1] \quad -f(x) \leq -f(0)$$

ce qui entraîne :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) \geq f(0)$$

D'où : $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = f(0)$

et f est constante.

Remarque :

On peut aussi raisonner sur le minimum de f comme on l'a fait sur le maximum.

(d) On a donc prouvé : $\ker(T - Id_E) \subset \{\text{fonctions constantes}\}$

L'inclusion dans l'autre sens est triviale donc :

- 1 est valeur propre de T .
- $E_1(T) = \{\text{fonctions constantes}\}$

8. On a prouvé à la question 6 la propriété pour $p = 0$.

Supposons la propriété vraie au rang p .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $|\lambda| > \frac{1}{2^{p+1}}$ et $\lambda \notin \left\{ \frac{1}{2^k}, 0 \leq k \leq p \right\}$

Soit $f \in E$ tel que $T(f) = \lambda f$.

En dérivant, on obtient $\frac{1}{2}T(f') = \lambda f'$ donc $T(f') = 2\lambda f'$ avec $|2\lambda| > \frac{1}{2^p}$ et $2\lambda \notin \left\{ \frac{1}{2^k}, 0 \leq k \leq p-1 \right\}$

D'après l'hypothèse de récurrence $f' = 0$.

Donc $f = Cte$.

Mais les constantes non nulles sont propres pour la valeur propre 1 et λ est différent de 1 donc $f = 0$.

En faisant tendre p vers l'infini, on en déduit que les seules valeurs propres non nulles possibles sont les nombres $\frac{1}{2^p}$, $p \in \mathbb{N}$.

9. Soit $f \in E$ tq $T(f) = \frac{1}{2}f$.

En dérivant, on obtient :

$$[T(f)]' = \frac{1}{2}f' \text{ ou encore } \frac{1}{2}T(f') = \frac{1}{2}f'.$$

$T(f') = f'$ donc f' est constante et f est affine.

Réciproquement soit $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{cases}$ une fonction affine.

$$\forall x \in [0, 1], T(f)(x) = \frac{1}{2}ax + b + \frac{1}{4}a$$

et :

$$\begin{aligned} T(f) = \frac{1}{2}f &\iff b + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}b \\ &\iff \frac{1}{2}b = -\frac{1}{4}a \\ &\iff b = -\frac{1}{2}a \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{1}{2}$ est bien valeur propre de T , le sous-espace propre associé étant la

droite engendrée par la fonction $f_{1/2} \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{1}{2} \end{cases}$

10. Soit $f \in E$ tq $T(f) = \frac{1}{4}f$.

En dérivant, on obtient :

$$\frac{1}{2}T(f') = \frac{1}{4}f' \text{ ou encore :}$$

$$T(f') = \frac{1}{2}f' \text{ donc :}$$

$$\exists a_1 \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [0; 1] f'(x) = a_1 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

On en déduit :

$$\exists b_1 \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [0; 1] f(x) = \frac{1}{2}a_1x^2 - \frac{1}{2}a_1x + b_1.$$

Réciproquement soit $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 - ax + b \end{cases}$ une fonction de la forme ci-dessus.

$$\forall x \in [0; 1] T(f)(x) = 1/4 ax^2 - 1/4 ax + b - 1/8 a$$

et :

$$\begin{aligned} T(f) = \frac{1}{4}f &\iff b - \frac{1}{8}a = \frac{b}{4} \\ &\iff \frac{3}{4}b = \frac{1}{8}a \\ &\iff b = \frac{a}{6} \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{1}{4}$ est bien valeur propre de T , le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la fonction $f_{1/4} \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{6} \end{cases}$

A propos des éléments propres de T : deuxième méthode

11. On raisonne par récurrence sur n mais plusieurs rédactions sont possibles.

- **Première rédaction**

On fixe $f \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$.

La propriété est vraie au rang 0 : on a $f(x)$ des deux côtés.

La propriété est vraie au rang 1 par définition de T .

On suppose la propriété vraie au rang n .

$T^{n+1}(f) = T(T^n(f))$ donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1] \quad T^{n+1}(f)(x) &= \frac{1}{2} \left(T^n(f)\left(\frac{x}{2}\right) + T^n(f)\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x/2+k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{(x+1)/2+k}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+2k+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq l \leq 2^{n+1}-1 \\ l \text{ pair}}} f\left(\frac{x+l}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq l \leq 2^{n+1}-1 \\ l \text{ impair}}} f\left(\frac{x+l}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Deuxième rédaction**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall f \in E \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$.

La propriété est vraie au rang 0 : on a $f(x)$ des deux côtés.

La propriété est vraie au rang 1 par définition de T .

On suppose la propriété vraie au rang n .

Soit $f \in E$.

$T^{n+1}(f) = T^n(T(f))$ donc

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [0; 1] \quad T^{n+1}(f)(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T(f) \left(\frac{x+k}{2^n} \right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2} \left(f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right) + f \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x+k}{2^n} + 1 \right) \right) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right) + f \left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right) + \sum_{k=0}^{2^n-1} f \left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right) + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f \left(\frac{x+k}{2^{n+1}} \right)
 \end{aligned}$$

• **Troisième rédaction**

On fixe $f \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, 1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f \left(\frac{x+k}{2^n} \right)$.

La propriété est vraie au rang 0 : on a $f(x)$ des deux côtés.

La propriété est vraie au rang 1 par définition de T .

On suppose la propriété vraie au rang n et on la voit comme :

$$T^n(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} g_k \text{ avec } g_k : x \mapsto f \left(\frac{x+k}{2^n} \right)$$

On a alors par linéarité de T :

$$\begin{aligned}
 T^{n+1}(f) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} T(g_k) \text{ avec pour tout } k \text{ compris entre } 0 \text{ et } 2^n-1 \text{ et tout } x \text{ compris} \\
 &\text{entre } 0 \text{ et } 1 : \\
 T(g_k)(x) &= \frac{1}{2} \left(f \left(\frac{x/2+k}{2^n} \right) + f \left(\frac{(x+1)/2+k}{2^n} \right) \right) \\
 &\text{et on conclut comme dans la première rédaction.}
 \end{aligned}$$

12. Si f est continue sur le segment $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

En prenant $a = 0$ et $b = 1$, on a :

$$\forall f \in E \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Par extraction d'une sous-suite, on a :

$$\forall f \in E \quad T^n(f)(0) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f \left(\frac{k}{2^n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

13. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a; b]$.

$$\text{Soit } M = \sup_{x \in [a; b]} |f'(x)|.$$

On a :

$$\forall (x, y) \in [a; b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$$

On en déduit, pour f dans E et x dans $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} |T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| &= \frac{1}{2^n} \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{Mx}{2^n} = \frac{Mx}{2^n} \end{aligned}$$

D'où : $T^n(f)(x) - T^n(f)(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et on a :

$$\forall f \in E \quad \forall x \in [0; 1] \quad T^n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

14. Ce sont les éléments de $] -1; 1]$.

15. Soit λ une valeur propre de T .

Soit f un vecteur propre associé.

La fonction f n'est pas la fonction nulle donc il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

$$\lambda^n f(x_0) = T^n(f)(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt \text{ avec } f(x_0) \neq 0 \text{ donc la suite } (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

On en déduit que $\lambda \in] -1; 1]$.

16. Soit f telle que $T(f) = f$.

Soit $x \in [0; 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = T^n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Donc : $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \int_0^1 f(t) dt$ et f est constante.

Réciproquement, on vérifie facilement que si f est constante alors $T(f) = f$.

1 est bien valeur propre de f et $E_1(f) = \mathbb{R}f_0$ avec $f_0 \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$.

17. On raisonne par récurrence sur n .

f_0 est une fonction non nulle de E .

On suppose que f_n est une fonction non nulle de E .

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel intégral, f_{n+1} est une primitive de f_n donc f_{n+1} de classe $\mathcal{C}^\infty$.

f_{n+1} n'est pas la fonction nulle car sa dérivée ne l'est pas.

18. $\forall x \in [0; 1] \quad f_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$$\forall x \in [0; 1] \quad f_2(x) = 1/2 x^2 - 1/2 x + 1/12$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x f_{n-1}(t) dt \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^1 (t-1) f_{n-1}(t) dt = Kte \right) dx \\ &= \left[x \int_0^x f_{n-1}(t) dt \right]_0^1 - \int_0^1 x f_{n-1}(x) dx + \int_0^1 (t-1) f_{n-1}(t) dt \\ &= \int_0^1 f_{n-1}(t) dt - \int_0^1 t f_{n-1}(t) dt + \int_0^1 (t-1) f_{n-1}(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

20. On a déjà montré que les f_n sont non nulles.

On va montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T(f_n) = \frac{1}{2^n} f_n$$

La propriété est vraie au rang 0.

On suppose la propriété vraie au rang n .

$$[T(f_{n+1})]' = \frac{1}{2} T(f'_{n+1}) = \frac{1}{2} T(f_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} f_n = \frac{1}{2^{n+1}} f_n = \frac{1}{2^{n+1}} f'_{n+1}$$

$$\text{Donc } T(f_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}} f_{n+1} + Cte.$$

En intégrant entre 0 et 1, on a :

$$\begin{aligned} Cte &= \int_0^1 T(f_{n+1})(x) \, dx - \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 f_{n+1}(x) \, dx \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \int_0^1 f_{n+1}(x) \, dx \text{ cf le début de l'exercice} \\ &= 0 \text{ cf la question 19} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } T(f_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}} f_{n+1}.$$

Remarque

En raisonnant par récurrence comme à la question 8, on peut montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2^n}$ est la droite dirigée par la fonction f_n .