ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2025 - 2026
Chapitre 4 :
Trigonalisation

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Définitions et généralités

1.1 Définition d'un endomorphisme trigonalisable

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est trigonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

1.2 Définition d'une matrice trigonalisable

Une matrice (carrée) est dite trigonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire.
On peut expliciter cette définition :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M trigonalisable $\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire tq $M = P\,T\,P^{-1}$

1.3 Lien avec les endomorphismes trigonalisables

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
u trigonalisable $\Longleftrightarrow$ M trigonalisable.

Démonstration

- $\Longrightarrow$
  On suppose u trigonalisable.
  Par définition, il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire.
  M et T, qui représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, sont semblables et M est trigonalisable.
- $\Longleftarrow$
  On suppose M trigonalisable.
  Par définition, il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $M = P\,T\,P^{-1}$.
  P, qui est inversible, est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une nouvelle base $\mathcal{C}$ de E.

Les formules de changement de bases donnent :
$Mat_{\mathcal{C}}(u) = P^{-1}\, M\, P = T$ triangulaire et u est trigonalisable.

1.4 Matrices triangulaires supérieures ou matrices triangulaires inférieures ?

1.4.1 Rappel

Toute matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire inférieure.
C'est un des exercices du TD d'algèbre linéaire.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$
Soit $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$. C'est une base de $\mathbb{K}^n$.
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_A) = \begin{pmatrix} a_{n,n} & & 0 \\ & \ddots & \\ ? & & a_{1,1} \end{pmatrix}$
Donc A est bien semblable à une matrice triangulaire inférieure.
La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

Le même raisonnement montre que toute matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

1.4.2 Proposition

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :
  (i) M est trigonalisable
  (ii) M est semblable à une matrice triangulaire supérieure
  (iii) M est semblable à une matrice triangulaire inférieure
- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :
  (i) u est trigonalisable
  (ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
  (iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire inférieure.

Démonstration

- (i)$\Longrightarrow$(ii) Il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = P\,T\,P^{-1}$.
  Si T est triangulaire supérieure alors M est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
  Si T est triangulaire inférieure alors il existe $T_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $T = Q\,T_S\,Q^{-1}$.

$M = P\,T\,P^{-1} = P\,(Q\,T_S\,Q^{-1})\,P^{-1} = (PQ)\,T_S\,(Q^{-1}P^{-1}) = (PQ)\,T_S\,(PQ)^{-1}$
M est bien semblable à une matrice triangulaire supérieure.
(ii)$\Longrightarrow$(iii) Il existe $T_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = P\,T_S\,P^{-1}$.
Il existe $T_I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $T_S = Q\,T_I\,Q^{-1}$.
$M = P\,T_S\,P^{-1} = P\,(Q\,T_I\,Q^{-1})\,P^{-1} = (PQ)\,T_I\,(Q^{-1}P^{-1}) = (PQ)\,T_I\,(PQ)^{-1}$
M est bien semblable à une matrice triangulaire inférieure.
(iii)$\Longrightarrow$(i) trivial

- (i)$\Longrightarrow$(ii) Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u$.
M est trigonalisable donc il existe $T_S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = P\,T_S\,P^{-1}$.
P est inversible donc c'est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ une autre base de E.
D'où :
$T_S = P^{-1}\,M\,P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u\,P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u$
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u$ est triangulaire supérieure.
(ii)$\Longrightarrow$(iii) Il existe $\mathcal{C}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u$ est triangulaire supérieure.
Il existe $T_I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u = Q\,T_I\,Q^{-1}$.
Q est inversible donc c'est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ une autre base de E.
Les formules de changement de base donne :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u = Q^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u\,Q = T_I$
Donc il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire inférieure.
(iii)$\Longrightarrow$(i) Il existe $\mathcal{C}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u$ est triangulaire inférieure.
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}u$ est trigonalisable.
D'après 1.3, u est trigonalisable.

2 Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

2.1 Cas des endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est trigonalisable $\Longleftrightarrow$ χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
En particulier :
Soient E un $\mathbb{C}$ ev de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Démonstration
Il est écrit dans le programme que cette démonstration n'est pas exigible.
Le sens $\Longrightarrow$ est trivial :

Il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{n,n} \end{pmatrix}$

D'où :

$\chi_u(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \det(\lambda I_n - T) = \begin{vmatrix} \lambda - t_{1,1} & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - t_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - t_{i,i})$

Donc $\chi_u = \chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - t_{i,i})$

D'une manière générale, on lit les valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités, d'une matrice triangulaire directement sur la diagonale.

La réciproque est plus difficile et n'est pas exigible. Néanmoins la connaître peut aider à traiter certains exercices. On raisonne par récurrence sur la dimension de E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$:

Pour tout E $\mathbb{K}$-ev de dimension n et tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

$\mathcal{P}(n)$ est vraie : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

χ_u est de degré 1 donc χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

La matrice de u est une matrice à une seule ligne et une seule colonne donc elle est triangulaire supérieure.

On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie ($n \geq 2$).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

χ_u a donc au moins une racine. Notons la λ et considérons e_1 un vecteur propre associé.

$e_1 \neq 0$ donc la famille (e_1) est libre et on peut la compléter en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit p la projection sur $H = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ parallèlement à $\mathbb{K}e_1$.

Soit $v \begin{cases} H \to H \\ x \mapsto p(u(x)) \end{cases}$

$\forall x \in H\ \exists! \mu(x) \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = p(u(x)) + \mu(x)e_1 = v(x) + \mu(x)e_1$.

On peut montrer que μ est une application linéaire de H dans $\mathbb{K}$ mais cela ne nous servira pas.

Soit M la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

e_1 est un vecteur propre donc $m_{1,1} = \lambda$ et pour tout i compris entre 2 et n, $m_{i,1} = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par définition de v et de μ, on a :

$\forall j \in [\![2;n]\!]\ \mu(e_j) = m_{j,1}$ et $v(e_j) = \sum_{i=2}^{n} m_{i,j}e_j$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{K}\ \chi_u(x) &= \det(xid_E - u) = \begin{vmatrix} x-\lambda & -m_{1,2} & \dots & -m_{1,n} \\ 0 & x - m_{2,2} & \dots & -m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -m_{n,2} & \dots & x - m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= (x-\lambda)\begin{vmatrix} x - m_{2,2} & \dots & -m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -m_{n,2} & \dots & x - m_{n,n} \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la première colonne} \\
&= (x-\lambda)\det(xI_{n-1} - \text{Mat}_{(e_2,\dots,e_n)}(v)) \\
&= (x-\lambda)\chi_v(x)
\end{aligned}$$

On a donc $\chi_u = (X - \lambda)\chi_v$ et χ_v est scindé sur $\mathbb{K}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ une base de H dans laquelle la matrice de v est triangulaire supérieure.
$\mathbb{K}e_1$ et H sont supplémentaires donc $(e_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de E.
Soit T la matrice de u dans cette base.
Le même raisonnement que pour $(e_1, \dots, e_n)$ montre que la matrice $\begin{pmatrix} t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n,2} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}$ est la matrice de v dans la base $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ de H. C'est donc une matrice triangulaire supérieure :
Pour $j \geq 2$:
$i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
Mais pour $j = 1$:
$i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
puisque $u(e_1)$ est toujours égal à λe_1 (la première colonne de T est la même que celle de M).
On a donc :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \ i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
et T est triangulaire supérieure.
Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Remarque
La démonstration montre qu'on peut ranger les valeurs propres de u dans l'ordre qu'on veut sur la diagonale.

2.2 Cas des matrices

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est trigonalisable $\Longleftrightarrow \chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
En particulier toute matrice réelle ou complexe (à n lignes et n colonnes évidemment) est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire.

Il est clair que cet énoncé est équivalent au précédent mais on peut quand même en donner une démonstration matricielle :
Le sens $\Longrightarrow$ est facile, on n'y reviendra pas.
Le sens $\Longleftarrow$ est plus difficile mais n'est pas exigible.
On raisonne par récurrence sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
En effet soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$.
χ_A est de degré 1 donc χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
A est une matrice triangulaire supérieure donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
On suppose $\mathcal{P}(n-1)$ vraie.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.
χ_A a donc au moins une racine λ.
λ est une valeur propre de A.
Soit e_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
$e_1 \neq 0$ donc la famille (e_1) est libre et on peut la compléter en $(e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{K}^n$.
Soit P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à cette nouvelle base.

$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
A et $P_1^{-1}AP_1$ sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique.
$\forall x \in \mathbb{K}\ \chi_A(x) = \begin{pmatrix} x-\lambda & -L \\ 0 & xI_{n-1} - A_1 \end{pmatrix} = (x-\lambda)\chi_{A_1}(x)$ en utilisant la formule du déterminant triangulaire par blocs ou même tout simplement en développant par rapport à la première colonne.
$\chi_A(X) = (X-\lambda)\chi_{A_1}(X)$ donc χ_{A_1} est scindé sur $\mathbb{K}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P_2 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tq $P_2^{-1}A_2P_2 = T_2$ soit triangulaire supérieure.
Soit $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ et $Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$.
Un calcul élémentaire par blocs donne $P_3Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2P_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$
On en déduit que P_3 est inversible d'inverse Q_3.

$$\begin{aligned} P_3^{-1}(P_1^{-1}AP_1)P_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & P_2^{-1}A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & LP_2 \\ 0 & P_2^{-1}A_1P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(P_1P_3)^{-1}A(P_1P_3)$ est donc triangulaire supérieure et on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3 Exemples

Je cite le programme :
"la technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication".

A mon avis, vous devez savoir effectuer la trigonalisation lorsque
$\sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E) - 1$ si u est un endomorphisme de E ou
$\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n - 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **Exemple 1 : trigonalisation de** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-8 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -14 & 1 & \lambda+5 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-8 & 3 \\ -14 & \lambda+5 \end{vmatrix} \text{ développement par rapport à la deuxième ligne} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)
\end{aligned}$$

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) &\iff \begin{cases} 8x-y-3z=2x \\ y=2y \\ 14x-y-5z=2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 6x-3z=0 \\ y=0 \\ 14x-7z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z=2x \\ y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, de dimension 1 comme attendu.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff \begin{cases} 8x-y-3z=x \\ y=y \\ 14x-y-5z=z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 7x-y-3z=0 \\ 14x-y-6z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 7x-y-3z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\
&\iff \begin{cases} 7x-3z=0 \\ y=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable.

On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(X_1, X_2) est libre : c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Mais on peut voir directement que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ avec un vecteur de la base canonique.

$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient (mais pas les deux autres).

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(P) = -1$ (développer par rapport à la dernière colonne)

P est bien inversible.

$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}$

$2 + 1 + \gamma = \operatorname{tr}(A)$: deux matrices semblables ont la même trace.

On en déduit $\gamma = 1$.

On peut aussi dire que $1, 2, \gamma$ est la liste des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

On a donc :

$AX_3 - X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

ce qui conduit au système :

$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -1 \\ 2\alpha + 7\beta = -1 \end{cases}$

La résolution est facile et on trouve $\alpha = -4$ et $\beta = 1$

Finalement, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Exemple 2**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. A est-elle trigonalisable ?
3. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En concours, cet exercice doit être posé question après question sinon on a des indications sur les réponses.

1.

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda - 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)\left(\lambda(\lambda - 1) + 1\right) + 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda + \lambda - 1 \\
&= (\lambda - 1)\left((\lambda - 2)\lambda + 1\right) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 1)^2
\end{aligned}$$

$\chi_A = (X-1)^3$
1 est valeur propre triple de A mais $A \neq I_3$ donc A n'est pas diagonalisable.

2. χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable.
3. Vue la première colonne, on cherche $E_1(A)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} 2x+y=x \\ y+z=y \\ -x-y=z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
On cherche ensuite X_2 tel que $AX_2 = X_1 + X_2$.
$AX_2 = X_1 + X_2 \iff \begin{cases} 2x+y=1+x \\ y+z=-1+y \\ -x-y=z \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1 \\ z=-1 \end{cases}$
On prend $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On cherche ensuite X_3 tel que $AX_2 = X_2 + X_3$.
$AX_3 = X_2 + X_3 \iff \begin{cases} 2x+y=x \\ y+z=1+y \\ -x-y=-1+z \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$
On prend $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\det_{Can}(X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$
(X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Finalement, $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Applications

4.1 Proposition

(non mentionnée dans le programme)

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  On suppose que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec leurs multiplicités.
  Soit $k \in \mathbb{N}$.
  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont les valeurs propres de M^k comptées avec leurs multiplicités.
  Plus généralement, soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
  Alors $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$ sont les valeurs propres de $Q(M)$ comptées avec leurs multiplicités.
  En particulier :
  $\forall k \in \mathbb{N} \ \mathrm{tr}(M^k) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$

- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u comptées avec leurs multiplicités.
  Soit $k \in \mathbb{N}$.
  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont les valeurs propres de u^k comptées avec leurs multiplicités.
  Plus généralement, soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
  Alors $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$ sont les valeurs propres de $Q(u)$ comptées avec leurs multiplicités.

Démonstration

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que $M = PTP^{-1}$

Une récurrence élémentaire donne :

$\forall k \in \mathbb{N} \ T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

D'où : $Q(M) = PQ(T)P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$

D'où le résultat.

4.2 Adhérence de l'ensemble des matrices complexes diagonalisables

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer $\overline{\mathcal{D}}$.

X 2022

1. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. En déduire :
   $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ \chi_M(M) = 0$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
M est trigonalisable donc il existe P inversible complexe et T triangulaire supérieure complexe telles que $M = P\,T\,P^{-1}$.
Sur la diagonale de T, on a $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p$ où les λ_i sont deux à deux distincts.

On considère T_k qui a les mêmes coefficients que T en dehors de la diagonale et sur la diagonale :
$\lambda_1, \lambda_1 + \dfrac{1}{k}, \ldots, \lambda_1 + \dfrac{\alpha_1 - 1}{k}, \lambda_2, \lambda_2 + \dfrac{1}{k}, \ldots$
$T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$ et $M_k = P\,T_k\,P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} P\,T\,P^{-1} = M$
Les λ_i étant deux à deux distincts, si k est assez grand :
$i \neq j \Longrightarrow \lambda_i + \dfrac{l_1}{k} \neq \lambda_j + \dfrac{l_2}{k}$ si $0 \leq l_1 < \alpha_1$ et $0 \leq l_2 < \alpha_2$ (faire un dessin avec des disques centrés en $\lambda_{indicequelconque}$)
Donc à partir d'un certain rang, χ_{T_k} est scindé à racines simples. On a alors T_k et $M_k \in \mathcal{D}$.
D'où $M \in \overline{\mathcal{D}}$.
On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \subset \overline{\mathcal{D}}$.
$\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est triviale donc $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En d'autres termes, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

4.3 Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
D'après ce qui précède, il existe une suite de matrices diagonalisables $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers M.
On a déjà prouvé le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices diagonalisables :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \chi_{M_k}(M_k) = 0$
Peut-on faire tendre k vers $+\infty$ et obtenir ainsi $\chi_M(M) = 0$?
$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{M_k}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_k)$.
Compte tenu de la continuité du déterminant, si on fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\chi_{M_k}(\lambda) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \det(\lambda I_n - M) = \chi_M(\lambda)$.
En d'autres termes la suite de fonctions $(\chi_{M_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{C}$ vers la fonction χ_M mais la convergence simple est insuffisante.
Rappelons par exemple que si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes qui converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$ alors la convergence simple ne permet pas d'affirmer que la suite $(\chi_{M_k}(\lambda_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\chi_M(\lambda)$.

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, soit $L_k = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{n}(X-k)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{n}(l-k)}$.
Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $0, 1, \ldots, n$ (qui sont bien deux à deux distincts).

$(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc l'application $N \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k L_k \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k| \end{cases}$ est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$.
Mais :
$\forall P \in \mathbb{C}_n[X]\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k) L_k$
Donc :

$\forall k \in \mathbb{N}\ N\left(\chi_M - \chi_{M_k}\right) = \sum_{l=0}^{n} |\chi_M(l) - \chi_{M_k}(l)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc la suite $(\chi_{M_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers χ_M dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathbb{C}_n[X]$.

Pour tout k compris entre 0 et n, l'application $\phi_k \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{n} a_l X^l \mapsto a_k \end{cases}$ est linéaire donc continue (car $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie).

$\forall k \in \mathbb{N}\ \sum_{l=0}^{n} \phi_l(\chi_{M_k}) M_k^l = \chi_{M_k}(M_k) = 0$

Cette fois on peut faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir : $\sum_{l=0}^{n} \phi_l(\chi_M) M^l = 0$ ie $\chi_M(M) = 0$.

4.4 Réduction des matrices à deux lignes et deux colonnes

- **Cas des matrices complexes**

  Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

  — **Premier cas :** $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det A$ a deux racines simples λ_1 et λ_2.
  (Cela revient à dire que $\Delta = \mathrm{tr}\,(A)^2 - 4\det A \neq 0$)
  A est diagonalisable.
  $\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

  — **Deuxième cas :** $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det A$ a une racine double λ
  (Cela revient à dire que $\Delta = \mathrm{tr}\,(A)^2 - 4\det A = 0$)
  A est diagonalisable $\iff A = \lambda I_2$.
  On suppose désormais que A n'est pas diagonalisable
  $1 \leq \dim E_\lambda(A) < 2$ donc $E_\lambda(A) = \mathbb{C}e_1$ avec e_1 vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$.
  On complète (e_1) en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$.
  Soit P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}_1$.
  $A = P_1 \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_1^{-1}$.
  $\mathrm{tr}\,(A) = 2\lambda = \lambda + \beta$ donc $\beta = \lambda$.
  A n'est pas diagonalisable donc $\alpha \neq 0$.
  $A = P_1 \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P_1^{-1}$ avec $\alpha \neq 0$.

  On peut aller plus loin :
  $u_A(e_2) = \alpha e_1 + \lambda e_2$
  $u_A\left(\frac{1}{\alpha}e_2\right) = \frac{1}{\alpha}u_A(e_2) = e_1 + \lambda\,\frac{1}{\alpha}e_2$
  $\frac{1}{\alpha} \neq 0$ donc $\mathcal{B} = \left(e_1, \frac{1}{\alpha}e_2\right)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
  Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$.
  $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$

- **Cas des matrices réelles**

  Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Soit $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det A$ le polynôme caractéristique de A et $\Delta = \mathrm{tr}\,(A)^2 - 4\det A$

son discriminant.

— **Premier cas : $\Delta > 0$**
Cela revient à dire que χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
A est diagonalisable.
$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$
où λ_1 et λ_2 sont les racines de χ_A

— **Deuxième cas : $\Delta = 0$**
Cela revient à dire que χ_A a une racine (réelle) double λ.
A est diagonalisable $\iff A = \lambda I_2$.
Comme ci-dessus, on montre, lorsque A n'est pas diagonalisable :
$\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$
mais la réduction $A = P \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, qui est plus rapide à obtenir, peut suffire.

— **Troisième cas : $\Delta < 0$**
Cela revient à dire que χ_A a deux racines complexes non réelles conjuguées $a + ib$ et $a - ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ (voire $b \in \mathbb{R}_+^*$).
A n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ni a fortiori diagonalisable.
On va montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Soit $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ un vecteur propre (complexe) de A associé à la valeur propre (complexe) $a + ib$.
On a alors :
$E_{a+ib}(A) = \mathbb{C}v$ ($a + ib$ est valeur propre complexe simple de A)
$E_{a-ib}(A) = \mathbb{C}\overline{v}$ (A est réelle)
$(v, \overline{v})$ est une base de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A.
Soient $e_1 = \Re e(v)$ et $e_2 = \Im m(v)$.
e_1 et $e_2 \in \mathbb{R}^2$
On va montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Il suffit de prouver que cette famille est libre.
Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.
$\lambda_1 \dfrac{v + \overline{v}}{2} + \lambda_2 \dfrac{v - \overline{v}}{2i} = 0$
$\lambda_1(v + \overline{v}) - i\lambda_2(v - \overline{v}) = 0$
$(\lambda_1 - i\lambda_2)v + (\lambda_1 + i\lambda_2)\overline{v} = 0$
Donc $\lambda_1 + i\lambda_2 = 0$ avec λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
$\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A\frac{v + \overline{v}}{2} = \frac{1}{2}(Av + A\overline{v}) = \frac{1}{2}((a + ib)v + (a - ib)\overline{v}) \\ &= a\frac{v + \overline{v}}{2} + ib\frac{v - \overline{v}}{2} = ae_1 + ib\, ie_2 = ae_1 - be_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ae_2 &= A\frac{v - \overline{v}}{2i} = \frac{1}{2i}(Av - A\overline{v}) = \frac{1}{2i}((a + ib)v - (a - ib)\overline{v}) \\ &= a\frac{v - \overline{v}}{2i} + b\frac{v + \overline{v}}{2} = ae_2 + be_1 \end{aligned}$$

$Mat_{\mathcal{B}}(u_A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
En fait $\mathcal{C} = (e_1, -e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\begin{array}{rcl} u_A(e_1) & = & ae_1 - be_2 = ae_1 + b(-e_2) \\ u_A(-e_2) & = & -u_A(e_2) = -ae_2 - be_1 = -be_1 + a(-e_2) \end{array}$$

$Mat_{\mathcal{C}}(u_A) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
En notant P la matrice de passage de $Can_{\mathbb{R}^2}$ à $\mathcal{C}$, on a :
$A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}$

- **Exemple d'application :** (X 2013)
Soient A et B deux matrices non semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ayant la même trace t et le même déterminant d.
Montrer que $t^2 = 4d$.

Correction
$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A = X^2 - tX + d = X^2 - \mathrm{tr}(B)X + \det B = \chi_B$
Si $\chi_A = \chi_B$ a deux racines complexes distinctes alors A et B sont semblables à une même diagonale donc sont semblables.
C'est absurde donc $\chi_A = \chi_B$ a une racine double et $\Delta = t^2 - 4d = 0$.

- **Exemple d'application :** (Centrale 2010)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ comme valeur propre complexe.
Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$