ALGEBRE LINEAIRE
2025-2026
Correction des exercices du quatrième chapitre du cours

Exercice 1 *(CCP 2018)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle tq $f \circ f = 0$.
Quel est le rang de f ?

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction
$f^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ donc $\mathrm{rg}(f) \leq 3 - \mathrm{rg}(f)$.
On en déduit $\mathrm{rg}(f) \leq \dfrac{3}{2}$ puis $\mathrm{rg}(f) = 0$ ou 1.
f n'est pas nulle donc $\mathrm{rg}(f) = 1$.
Soit $\epsilon_1 \in \mathrm{Im}\,(f) \setminus \{0\}$.
$\epsilon_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et (ϵ_1) est libre donc on peut compléter (ϵ_1) en (ϵ_1, ϵ_2) base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ($\dim \mathrm{Ker}\,(f) = 3 - \mathrm{rg}(f) = 2$)
$\epsilon_1 \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc il existe ϵ_3 tq $\epsilon_1 = f(\epsilon_3)$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 = 0$.
On applique f, il reste $\lambda_3\epsilon_1 = 0$ avec $\epsilon_1 \neq 0$.
On en déduit $\lambda_3 = 0$.
On reporte : $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 = 0$ avec (ϵ_1, ϵ_2) libre.
On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est donc libre.
Vu son cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.